

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І. А. Дичка, М. В. Онай, Р. А. Гадиняк

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ: КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 121 «Інженерія програмного
забезпечення», спеціалізацією «Програмне забезпечення комп'ютерних та
інформаційно-пошукових систем»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензент *Романкевич Віталій Олексійович*, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Сулема Євгенія Станіславівна*, канд. техн. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 29.03.2018 р.)
за поданням Вченої ради факультету прикладної математики
(протокол № 8 від 26.03.2018 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Дичка Іван Андрійович, д-р техн. наук, проф.
Онай Микола Володимирович, канд. техн. наук, старший викладач
Гадиняк Руслан Анатолійович, асистент

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ: КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ

Математичне моделювання систем і процесів: комп'ютерний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», спеціалізації «Програмне забезпечення комп'ютерних та інформаційно-пошукових систем» / І. А. Дичка, М. В. Онай, Р. А. Гадиняк; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3.03 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 130 с.

Навчальний посібник розроблено для ознайомлення студентів з теоретичними відомостями та практичними прийомами побудови та аналізу математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями та їх системами, а також вимогами до виконання лабораторних робіт, зокрема правилами їх оформлення. Навчальне видання призначене для студентів, які навчаються за спеціальністю 121 Інженерія програмного забезпечення, спеціалізацією «Програмне забезпечення комп'ютерних та інформаційно-пошукових систем» факультету прикладної математики КПІ ім. Ігоря Сікорського.

© І. А. Дичка, М. В. Онай, Р. А. Гадиняк 2018

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Загальні вимоги до оформлення звіту з лабораторних робіт.....	6
Лабораторна робота №1. Математичні моделі, що описуються диференціальними рівняннями першого порядку.....	8
Лабораторна робота №2. Математичні моделі, що описуються диференціальними рівняннями вищих порядків.....	50
Лабораторна робота №3. Математичні моделі, що описуються системами диференціальних рівнянь.....	80
Лабораторна робота №4. Моделювання в MatLab & Simulink.....	119

ВСТУП

Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого застосування математичного моделювання. Суть цієї методології полягає в заміні вихідного об'єкту його "образом" – математичною моделлю – та подальшим вивченням моделі за допомогою обчислювально-логічних алгоритмів, що реалізуються на комп'ютерах. Цей метод пізнання, конструювання та проектування поєднує в собі багато переваг як теорії, так і експерименту. Робота не з самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко та без суттєвих витрат досліджувати його властивості та поведінку в будь-яких ситуаціях. В той же час обчислювальні (комп'ютерні, стимуляційні, імітаційні) експерименти з моделями об'єктів дозволяють, спираючись на потужність сучасних обчислювальних методів та технічних інструментів інформатики, детально та глибоко вивчати об'єкти достатньо повно, що є недоступним для чисто теоретичного підходу. Недивно, що методологія математичного моделювання швидко розвивається, охоплюючи нові сфери – від розробки технічних систем та їх керуванням до аналізу складних економічних та соціальних процесів.

Будучи методологією, математичне моделювання не замінює собою математику, фізику, біологію та інші наукові дисципліни і не конкурує з ними. Навпаки воно виконує синтезуючу роль, яку важко переоцінити.

У даних методичних вказівках розглядаються способи побудови математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями та їх системами, а також їх розв'язання на комп'ютері. Методичні вказівки складаються з 4 розділів, кожен з яких присвячений виконанню певної лабораторної роботи з дисципліни «Математичне моделювання систем та процесів», яка входить до складу циклу "Професійної підготовки"

навчального плану підготовки магістрів зі спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення».

В кожному розділі надаються короткі теоретичні відомості з певної теми, завдання на лабораторну роботу з цієї теми, вказівки щодо виконання завдання, а також наводяться вимоги до оформлення звіту з виконаної лабораторної роботи та контрольні питання для самоперевірки.

Лабораторні роботи з дисципліни «Математичне моделювання систем та процесів» розраховані на 18 академічних годин аудиторних занять.

Загальні вимоги до оформлення звіту з лабораторних робіт

Лабораторна робота має бути подана в електронному та друкованому вигляді.

Електронна версія зберігається в банку даних кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем ФПМ КПІ ім. Ігоря Сікорського. Файл з копією лабораторної роботи здається на кафедру разом з друкованим примірником безпосередньо під час захисту. Формат файлу *.docx або *.doc, або *.rtf, або *.pdf.

Звіт необхідно друкувати на одному боці аркуша білого паперу формату А4 (210x297 мм).

Основний текст звіту має бути набраний з дотриманням таких вимог:

- шрифт Times New Roman 14 пт;
- відступ першого рядка 12.5 мм ;
- міжрядковий інтервал 1.5;
- вирівнювання по ширині;
- поля: верхнє та нижнє – 20 мм; ліве – 30 мм; праве – 15 мм;
- від краю до верхнього/нижнього колонтитула 12.5 мм.

Текст в таблицях має бути набраний з дотриманням таких вимог (при необхідності дозволяється таблиці розміщувати в альбомному форматі):

- шрифт Times New Roman 12 пт;
- міжрядковий інтервал 1.0;
- інтервал перед 6 пт;
- інтервал після 6 пт.

Текст програм має бути набраний з дотриманням таких вимог (при необхідності дозволяється тексти програм розміщувати в альбомному форматі):

- шрифт Courier New 8 пт;
- міжрядковим інтервалом 1.0.

Всі рисунки повинні мати під рисунковий напис. Підрисунковий напис вирівнюється по центру і починається зі скорочення “Рис.”, потім ставиться пробіл та порядковий номер рисунку. Після номера рисунка ставиться крапка, пробіл та пишеться назва рисунка.

На всі рисунки розміщені у звіті має бути посилання в тексті звіту. Посилання на рисунок у тексті виконується за його номером, розташованим після скорочення “рис.”.

Нумерацію сторінок виконують арабськими цифрами. Першою сторінкою звіту з лабораторної роботи є оформлений за зразком титульний аркуш, який включають до загальної нумерації, але номер сторінки на ньому не проставляють. На всіх наступних сторінках обов’язково проставляють у правому нижньому куті номер сторінки без крапки в кінці використовуючи шрифт Times New Roman 10 пт.

На кожній сторінці, окрім титульної, в правому верхньому куті має бути надруковано прізвище, ініціали студента та номер групи.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Мета роботи: опанувати комп'ютерні засоби для розв'язання та аналізу диференціальних рівнянь першого порядку та набути навичок побудови найпростіших математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями першого порядку.

Теоретичні відомості

Звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) – це рівняння виду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0, \quad (1.1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x , шукану функцію $y(x)$ та її похідні включно до m -го порядку. В іншому випадку, якщо залежна змінна буде функцією двох або більшої кількості незалежних змінних, то скоріше за все, в рівняння будуть входити й частинні похідні, в цьому випадку маємо *диференціальне рівняння у частинних похідних*.

Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо функція F – лінійна функція за змінною y та її похідними.

Графік розв'язку $y(x)$ диференціального рівняння називається *інтегральною кривою*. Проекцію інтегральної кривої на вісь ординат називають *фазовою кривою*, або *траєкторією* диференціального рівняння.

Порядок ЗДР – це порядок старшої похідної від шуканої функції.

Загальним інтегралом ЗДР називається функція

$$G(x, y(x), C_1, \dots, C_m) = 0 \quad (1.2)$$

тобто розв'язок $y(x)$ входить у (1.2) неявно тому його ще називають *неявним розв'язком ЗДР*, причому кількість констант інтегрування дорівнює порядку ЗДР.

Загальним розв'язком ЗДР називається функція

$$y(x) = \varphi(x, C_1, \dots, C_m), \quad (1.3)$$

яка з'єднує незалежну змінну x і m констант інтегрування C_i , тобто розв'язок $y(x)$ визначається явно.

Для знаходження констант інтегрування C_i задаються додаткові умови, кількість яких дорівнює порядку ЗДР. У випадку, коли всі додаткові умови задаються в одній точці x_0 , сукупність ЗДР і додаткових умов називається *задачею Коші*, а додаткові умови *початковими умовами*. Якщо ж додаткові умови задаються більш ніж в одній точці, то сукупність ЗДР і додаткових умов називають *граничною задачею Коші (або просто граничною задачею)* для ЗДР, а додаткові умови – *граничними умовами*. Розв'язок задачі Коші та граничної задачі називається *частковим розв'язком ЗДР*.

Варто відмітити, що частковий розв'язок $y = y(x)$, отриманий з рівняння (1.2), не обов'язково має задовольняти задані початкові умови. Наприклад, очевидно, що неявним розв'язком (загальним інтегралом) диференціального рівняння $x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ є неявна функція $x^2 + y^2 = C$. При початковій умові $y(0) = 2$ маємо $x^2 + y^2 = 4$, але тільки перше з двох явних розв'язків

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{та} \quad y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

задовольняє початкову умову $y(0) = 2$.

Якщо диференціальне рівняння може бути розв'язане явно відносно старшої похідної, що входить в нього, то це означає, що рівняння може бути записане в *нормальній формі*:

$$y^{(n)} = U(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.4)$$

Рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad (1.5)$$

в праву частину, якого незалежна змінна x не входить явно називають *автономним* диференціальним рівнянням першого порядку.

Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.6)$$

де праворуч функція $f(x, y)$ містить незалежну змінну x та залежну змінну y .

Розглянемо на графіку функції $y = y(x)$ довільну точку та проведемо в цій точці дотичну. З геометричного змісту похідної слідує, що

$$y'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.7)$$

де α – кут нахилу до осі абсцис дотичної до функції $y(x)$.

З рівностей (1.6) та (1.7) можна записати:

$$f(x, y) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.8)$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт дотичної до графіку розв'язку диференціального рівняння (1.6) в кожній його точці дорівнює значенню в цій точці правої частини диференціального рівняння першого порядку (1.6).

Можливо сказати, що рівняння (1.6) задає *поле напрямків*, яке в кожній точці зображується за допомогою відрізків дотичних, кутові

коефіцієнти яких визначаються значеннями правої частини $f(x, y)$ диференціального рівняння (1.6) в цій точці.

В цьому полягає геометричний зміст рівняння (1.6). Побудувавши відрізки дотичних для достатньо великої кількості точок, ми отримаємо наочне зображення поля напрямів. Оскільки дотична в певній точці графіка розв'язку має той самий напрям, що й відрізок в цій точці, то задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння (1.6) геометрично можна сформулювати так: знайти криву $y(x)$, яка в кожній точці має дотичну, що задана рівнянням (1.6), або, що те ж саме, в кожній точці дотикається поля напрямів, що задано рівнянням (1.6).

Криві, що визначені рівнянням $f(x, y) = \text{const}$, називають ізоклінами. Тобто можна сказати, що ізокліни це лінії рівня правої частини диференціального рівняння (1.6). У всіх точках певної ізокліни напрямок поля є однаковим.

Побудуємо поле напрямків диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$. Рівняння ізоклін цього диференціального рівняння має вигляд $x^2 + y^2 = k$, тобто ізоклінами слугують концентричні кола радіусом \sqrt{k} з центром у початку координат (рис. 1.1).

В точках кожного з кіл необхідно провести відрізки, що утворюють з віссю OX один і той самий кут α , тангенс якого дорівнює k . Так, при $k = 1$ ізокліною є одиничне коло $x^2 + y^2 = 1$, при $k = 4$ – коло $x^2 + y^2 = 2^2$ радіуса 2, при $k = 9$ – коло $x^2 + y^2 = 3^2$ радіуса 3 і т.д. Цим ізоклінам відповідають напрямки відрізків, що утворюють з віссю OX кути $\alpha_1 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\alpha_2 = \arctg 4 \approx 63^\circ$, $\alpha_3 = \arctg 9 \approx 71^\circ$. При $k = 0$ отримуємо $x^2 + y^2 = 0$. Цьому рівнянню задовольняє єдина точка $(0, 0)$. В цьому випадку ізокліна

складається з однієї точки, для якої $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ($\operatorname{arctg} 0 = 0$). На рис. 1.1 побудовані вище перелічені ізокліни та зображено поле напрямків даного диференціального рівняння.

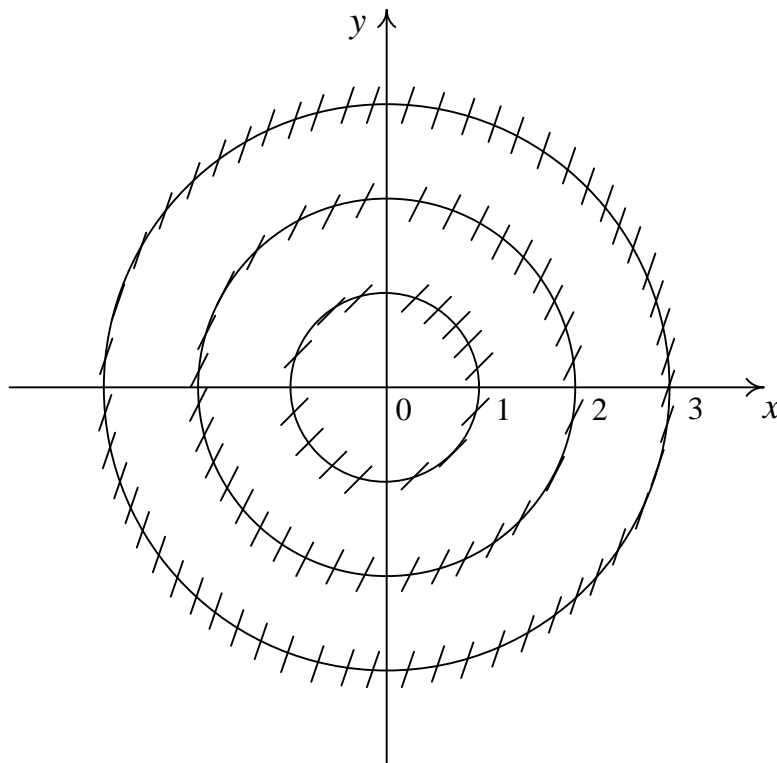


Рис. 1.1. Ізокліни рівняння $y' = x^2 + y^2$

На рис. 1.2 наведено поле напрямків для диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$, побудоване за допомогою програми *dfield8* написаної на мові програмування *MatLab*.

Для того, щоб побудувати інтегральну криву необхідно взяти на площині довільну точку (x_0, y_0) та провести через цю точку криву так, щоб вона в кожній точці торкалась поля напрямків. В якості прикладу, на рис. 1.3 програмно побудовані декілька інтегральних кривих у полі напрямків рівняння $y' = x^2 + y^2$.

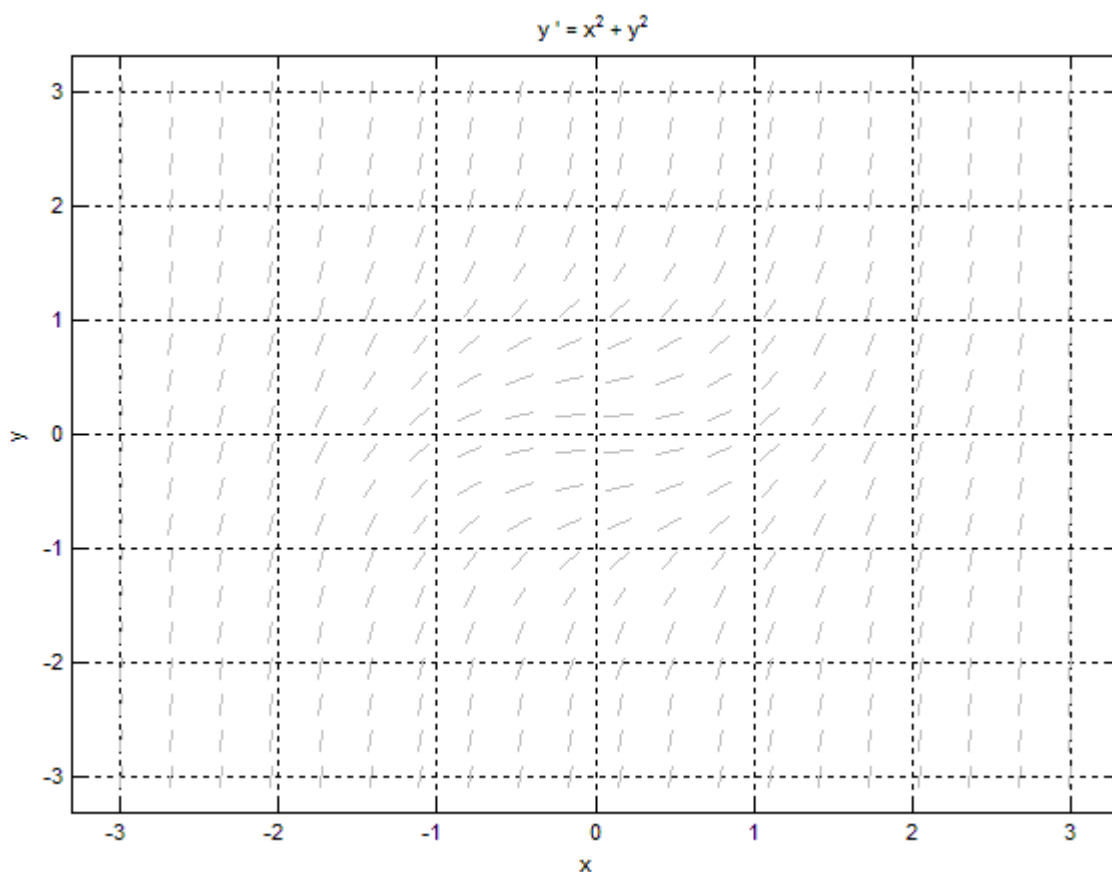


Рис. 1.2. Поле напрямків рівняння $y' = x^2 + y^2$ побудоване програмно

Одним з прикладів застосувань лінійних диференціальних рівнянь першого порядку є задачі на суміші.

Розглянемо резервуар, що містить суміш, наприклад розчин солі у воді. Припустимо, що розчин з концентрацією c_i (індекс i означає *input*) грамів солі на літр розчину вливається у резервуар зі сталою швидкістю r_i (індекс i означає *input*) літрів на секунду і що розчин в резервуарі одразу ж змішується, причому відтік має сталу швидкість r_o (індекс o означає *output*) літрів на секунду. Необхідно знайти кількість солі $x(t)$ в даний момент часу t , знаючи кількість $x(0) = x_0$ в момент часу $t = 0$.

Щоб написати диференціальне рівняння для $x(t)$, обчислимо зміну Δx протягом короткого інтервалу часу $[t; t + \Delta t]$.

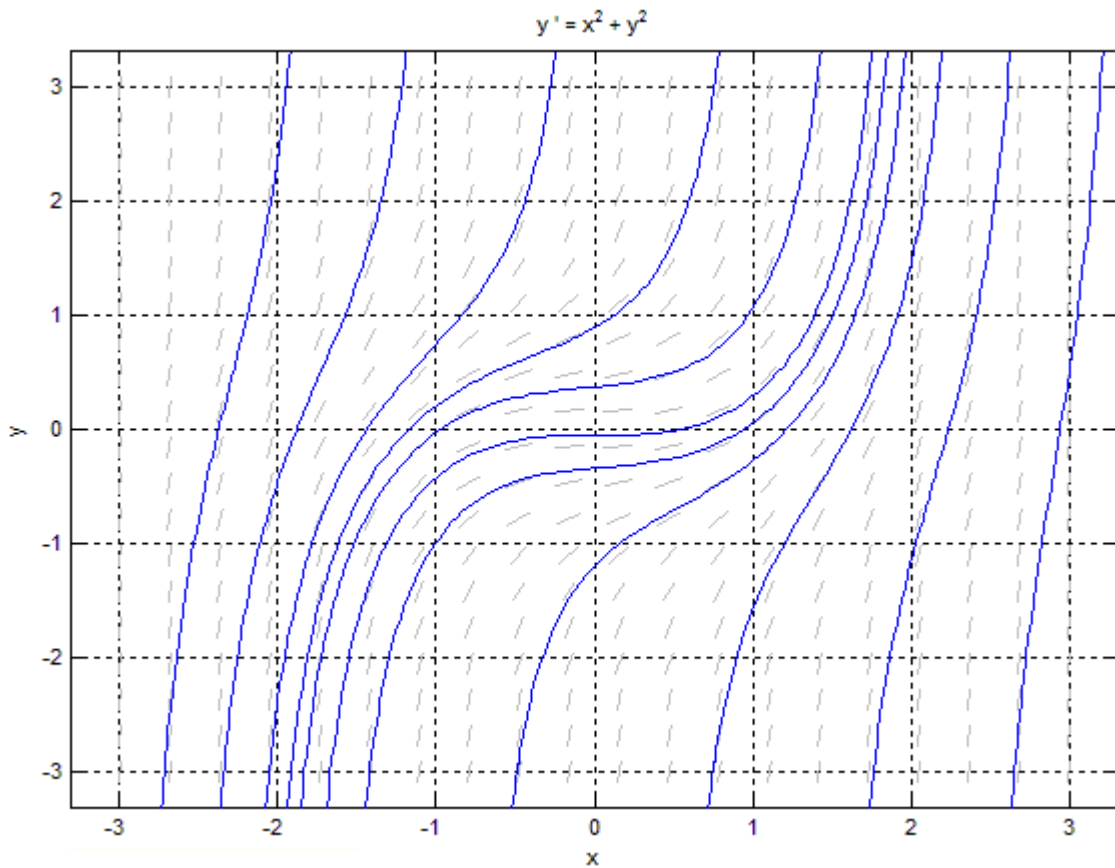


Рис. 1.3. Поле напрямків та інтегральні криві рівняння $y' = x^2 + y^2$ побудовані програмно

Кількість солі у розчині, що вливається у резервуар протягом часу Δt секунд дорівнює $r_i c_i \Delta t$ грамів.

Кількість солі у розчині, що витікає з резервуару протягом того ж самого інтервалу часу, залежить від концентрації $c_o(t)$ солі у розчині в

момент часу t . Очевидно, що $c_o(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$.

Тоді

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx r_i c_i - r_o c_o(t).$$

Візьмемо ліміт при $\Delta t \rightarrow 0$. Якщо всі функції є неперервними та $x(t)$ диференційовна, то похибка в цій апроксимації також наближається до нуля, і ми отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = r_i c_i - \frac{r_o x(t)}{V(t)}. \quad (1.9)$$

Якщо $V(0) = V_0$, то $V(t) = V_0 + (r_i - r_o)t$, тобто рівняння (1.9) є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Ще одним прикладом задач, які зводяться до розв'язання лінійного диференціального рівняння є задачі про коливання температури.

Розглянемо коливання температури всередині приміщення, які виникають під дією зовнішніх коливань температури, що мають форму

$$A(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t. \quad (1.10)$$

Наприклад, протягом доби влітку мінімальна температура дорівнює $T_{\min} = 19^\circ\text{C}$ в момент часу $t = 4$ (четверта ранку), а максимум $T_{\max} = 37^\circ\text{C}$ досягається, коли $t = 16$ (четверта година дня).

Запишемо, спочатку, рівняння для коливання температури назовні у вигляді $A(t) = a_0 + r_1 \cos \omega h(t - \alpha)$. Значення $a_0 = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} = \frac{37 + 19}{2} = 28$,

$r_1 = -\frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} = -\frac{37 - 19}{2} = -9$. Для того, щоб $A(4)$ дорівнювало T_{\min}

необхідно, щоб $\cos \omega h(t - \alpha) = 1$, а $\cos \omega h(t - \alpha) = 1$ коли $\omega h(t - \alpha) = 0$, тому $\alpha = 4$. Для того, щоб $A(16)$ дорівнювало T_{\max} необхідно, щоб

$$\cos \omega h(t - \alpha) = -1 \Leftrightarrow \omega h(t - \alpha) = \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\pi}{\omega(t - \alpha)} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{12}(16 - 4)} = 1.$$

Остаточно

$$A(t) = a_0 + r_1 \cos \omega h(t - \alpha) = 28 - 9 \cos \omega(t - 4). \quad (1.11)$$

Використовуючи тотожність $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ зводимо рівність (1.11) до вигляду (1.10):

$$A(t) = 28 - 9 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \omega t + \sin \frac{\pi}{3} \sin \omega t \right) = 28 - \frac{9}{2} \cos \omega t - \frac{9\sqrt{3}}{2} \sin \omega t$$

(1.12)

Існує закон охолодження, встановлений Ньютоном, який формулюється таким чином: швидкість зміни температури $u(t)$ тіла пропорційна різниці між u та температурою навколишнього середовища A , тобто

$$\frac{du}{dt} = -k(u - A), \quad (1.13)$$

де k – додатна константа.

Якщо ми запишемо закон Ньютона для охолодження тіла для відповідної внутрішньої температури $u(t)$ в момент часу t , але замість температури навколишнього середовища підставимо температуру назовні приміщення, що записується рівнянням (1.10), ми отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{du}{dt} + ku = k(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) \quad (1.14)$$

з коефіцієнтами-функціями $P(t) \equiv k$ та $Q(t) = kA(t)$.

Типові значення константи пропорційності k лежать в інтервалі від 0.2 до 0.5 (хоча k може бути більше, ніж 0.5 для погано ізольованого будинку з відчиненими вікнами, або менше, ніж 0.2 для добре теплоізольованого будинку з майже герметично зачиненими вікнами).

Припустимо, що опівночі (в момент часу $t_0 = 0$) початкова температура в будинку дорівнювала u_0 , тобто $u(0) = u_0$ і нам потрібно дослідити, яким чином буде змінюватись температура протягом декількох найближчих днів.

Розв'язком диференціального рівняння (1.14) з початковою умовою $u(0) = u_0$ є функція

$$u(t) = a_0 + c_0 e^{-kt} + c_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t, \quad (1.15)$$

де $c_0 = u_0 - a_0 - c_1$, $c_1 = \frac{k^2 a_1 - k \omega b_1}{k^2 + \omega^2}$, $d_1 = \frac{k \omega a_1 - k^2 b_1}{k^2 + \omega^2}$ та $\omega = \frac{\pi}{12}$.

Зверніть увагу, що згасаючий показниковий член у функції (1.15) прямує до нуля при $t \rightarrow +\infty$, майже не впливаючи на тривалий “стійкий періодичний” розв'язок

$$u_1(t) = a_0 + c_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t. \quad (1.16)$$

Отже, через тривалий час внутрішня температура буде коливатися кожні 24 години навколо тієї самої середньої температури a_0 , що й середня температура назовні.

Побудуємо множину інтегральних кривих, що відповідають можливим початковим температурам u_0 в межах від 0°C до 65°C

при $a_0 = 28$, $a_1 = -\frac{9}{2}$, $b_1 = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{12}$ та $k = 0.2$ (рис. 1.4).

Відмітимо, що незалежно від початкової температури внутрішня температура встановлюється приблизно протягом 20 годин та входить в режим періодичних щоденних коливань.

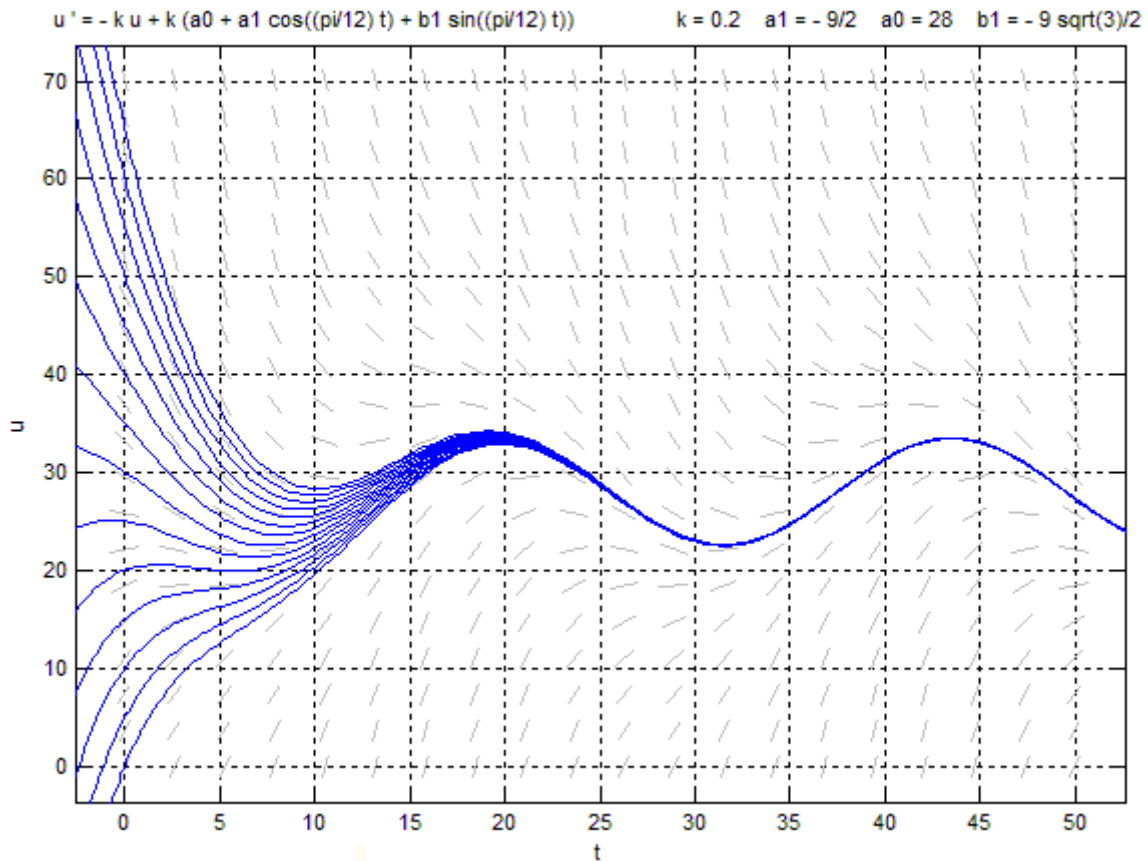


Рис. 1.4. Інтегральні криві для рівняння, що описує коливання температури в будинку при $u_0 = 0, 5, 10, \dots, 60, 65$

Розглянемо автономне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1.17)$$

Розв'язки рівняння $f(x) = 0$ грають важливу роль та називаються *положеннями рівноваги, точками рівноваги, стаціонарними точками, точками спокою, нерухомими точками, особливими точками або критичними точками* автономного диференціального рівняння (1.17).

Якщо $x = c$ – точка рівноваги рівняння (1.17), то диференціальне рівняння має сталий розв'язок $x(t) \equiv c$. Сталий розв'язок диференціального рівняння іноді називають *рівноважним розв'язком*.

Точка рівноваги c є стійкою, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує як завгодно мале $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільного розв'язку $x = x(t)$, початкове значення якого задовольняє нерівність

$$|x(t_0) - c| < \delta, \quad (1.18)$$

при всіх $t \geq t_0$ виконується нерівність

$$|x(t) - c| < \varepsilon. \quad (1.19)$$

Моделі зростання населення

Розглянемо модель зростання населення, яка враховує зміни показників народжуваності та смертності. Функція $P(t)$ буде неперервною апроксимацією фактичної чисельності населення, яка звичайно, змінюється не неперервно, а стрибками, оскільки її приростами є цілі числа.

Припустимо, що чисельність населення змінюється тільки в результаті народжень та випадків смерті, а іміграцію та еміграцію враховувати не будемо. Загальноприйнятим є оцінювати приріст та зменшення населення за допомогою функцій – коефіцієнта народжуваності та показника смертності, визначених таким чином:

- $\beta(t)$ – кількість народжень на одиницю населення за одиницю часу в момент часу t ;
- $\delta(t)$ – кількість випадків смерті на одиницю населення за одиницю часу в момент часу t .

Тоді зміна чисельності населення ΔP протягом часового інтервалу $[t; t + \Delta t]$ довжиною Δt дорівнює

$$\Delta P \approx \beta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t - \delta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t,$$

та

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx [\beta(t) - \delta(t)] P(t).$$

Звідки можемо записати диференціальне рівняння

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta) P. \quad (1.20)$$

Рівняння (1.20) є загальним рівнянням чисельності населення. Якщо β та δ є сталими, то рівняння (1.20) приводить до *рівняння природного зростання* $\frac{dP}{dt} = kP$, де $k = \beta - \delta$. Його ще називають *моделлю Мальтуса*.

Відомим фактом є те, що по мірі зростання чисельності населення коефіцієнт народжуваності зменшується. Припустимо, наприклад, що коефіцієнт народжуваності β – лінійна функція, що залежить від чисельності населення P , так, що $\beta = \beta_0 - \beta_1 P$, де β_0 та β_1 – додатні константи. Якщо показник смертності $\delta = \delta_0$ залишається сталим, то рівняння (1.20) приймає вигляд

$$\frac{dP}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 P - \delta_0) P \quad (1.21)$$

або

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \quad (1.22)$$

де $a = \beta_0 - \delta_0$ та $b = \beta_1$.

Якщо коефіцієнти a та b обидва додатні, то рівняння (1.22) називають *логістичним рівнянням*. Для зручності дослідження залежності чисельності населення $P(t)$ від значень параметрів в рівнянні, корисно переписати логістичне рівняння у вигляді

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \quad (1.23)$$

де $k = b$ та $M = \frac{a}{b}$ є константами.

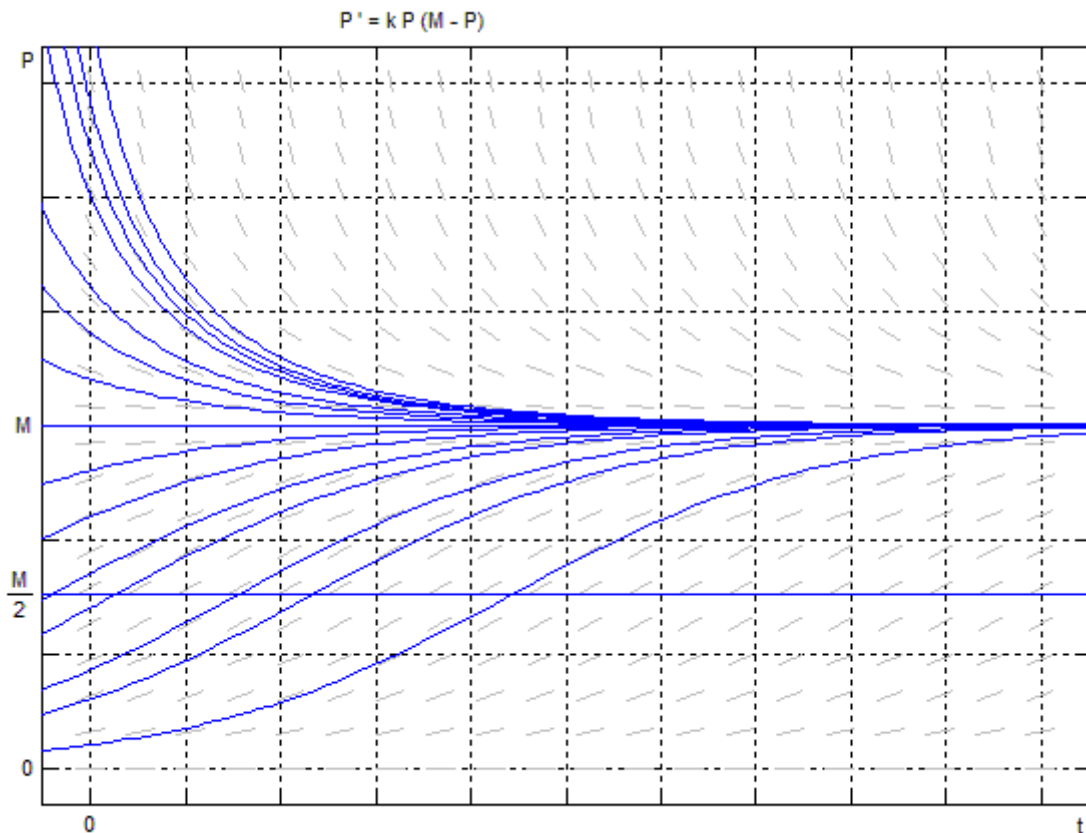


Рис. 1.5. Типові інтегральні криві логістичного рівняння $P' = kP(M - P)$

Легко показати, що розв'язком логістичної задачі Коші

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \quad P(0) = P_0 \quad (1.24)$$

є функція

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}. \quad (1.25)$$

Рівняння (1.24) має дві точки рівноваги $P = 0$ та $P = M$.

Загальний вигляд інтегральних кривих логістичного рівняння при $t \geq 0$ та будь-яких значень P нведено на рис. 1.6.

Зверніть увагу, що полоса $M - \varepsilon < P < M + \varepsilon$, яка містить стійку рівноважну криву $P = M$, діє подібно до витоку, – всі інтегральні криві, що

входять в неї (при русі точки по кривій зліва направо) залишаються всередині неї. А полоса $-\varepsilon < P < \varepsilon$, що містить нестійку інтегральну криву $x=0$, діє подібно до джерела, з якого виходять інтегральні криві та не повертаються в неї.

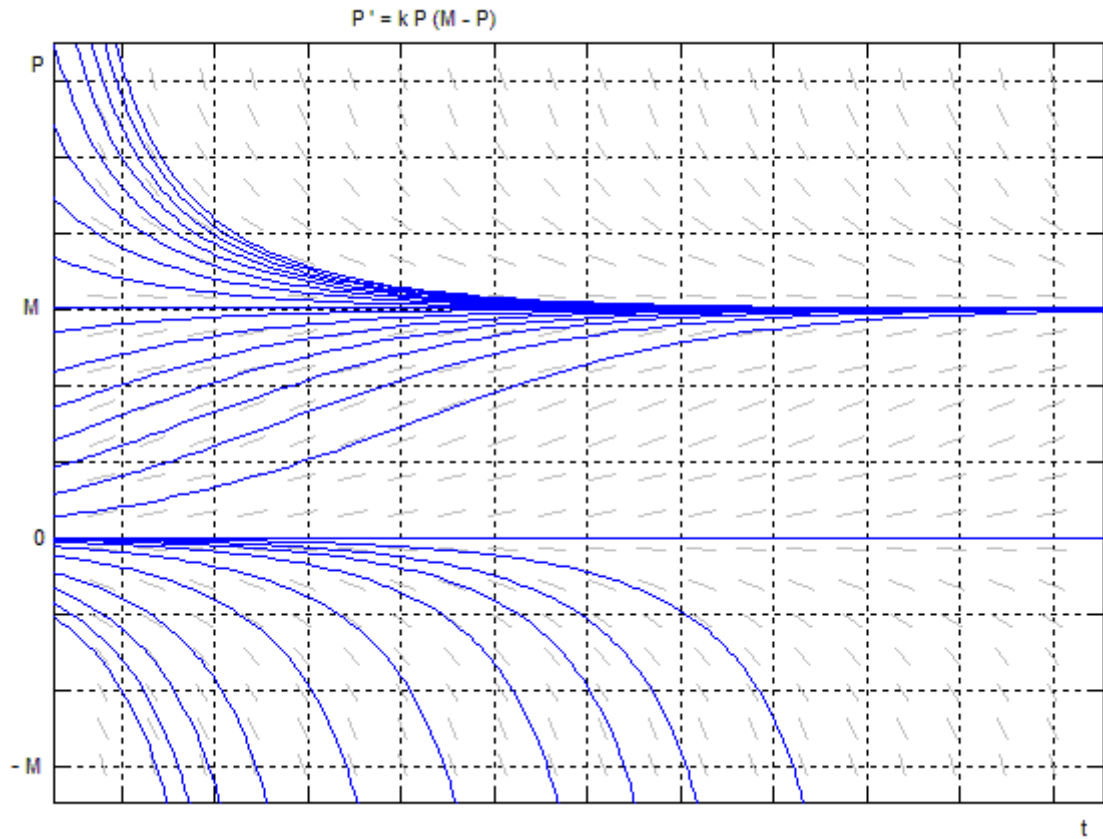


Рис. 1.6. Загальний вигляд інтегральних кривих логістичного рівняння $P' = k P (M - P)$

Ми можемо робити висновок про поведінку логістичного рівняння (1.24) за фазовою діаграмою (рис. 1.7), якщо відомі початкові значення. З фазової діаграми видно, що $P(t) \rightarrow M$ при $t \rightarrow \infty$, якщо $P_0 > M$ або $0 < P_0 < M$, тоді як $P(t) \rightarrow -\infty$ при збільшенні t , якщо $P_0 < 0$.

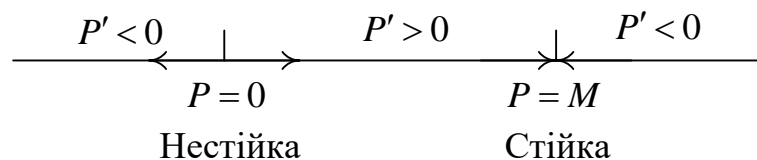


Рис. 1.7. Фазова діаграма логістичного рівняння $P' = k P (M - P)$

Автономне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - h, \quad (1.26)$$

де a , b та h додатні, можна застосувати для опису логістичної популяції зі збором врожаю. Наприклад, можливо розглядати популяцію риб в озері, з якого щорічно виловлюють h риб.

Рівняння (1.26) можна переписати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h, \quad (1.27)$$

в якому гранична чисельність популяції дорівнює M у випадку $h = 0$, тобто у випадку відсутності збору врожаю. Прийmemo тепер, що $h > 0$ та розв'яжемо квадратне рівняння $-kx^2 + kMx - h = 0$, таким чином знайшовши дві точки рівноваги H та N . Приймаючи, що швидкість збору врожаю $h < \frac{kM^2}{4}$, ми отримаємо, що обидві точки рівноваги H та N дійсні, причому $0 < H < N < M$.

Тоді рівняння (1.27) можна переписати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)(x - H). \quad (1.28)$$

Типові інтегральні криві логістичного рівняння зі збором врожаю при умові $h < \frac{kM^2}{4}$ виглядають так, як показано на рис. 1.8. Таким чином, сталий розв'язок $x(t) \equiv N$ – це рівноважний граничний розв'язок, тоді як $x(t) \equiv H$ – порогів розв'язок, – який відділяє різні поведінки популяції. Чисельність популяції наближається до N , якщо $x_0 > H$, але популяція вимирає через збір врожаю, якщо $x_0 < H$.

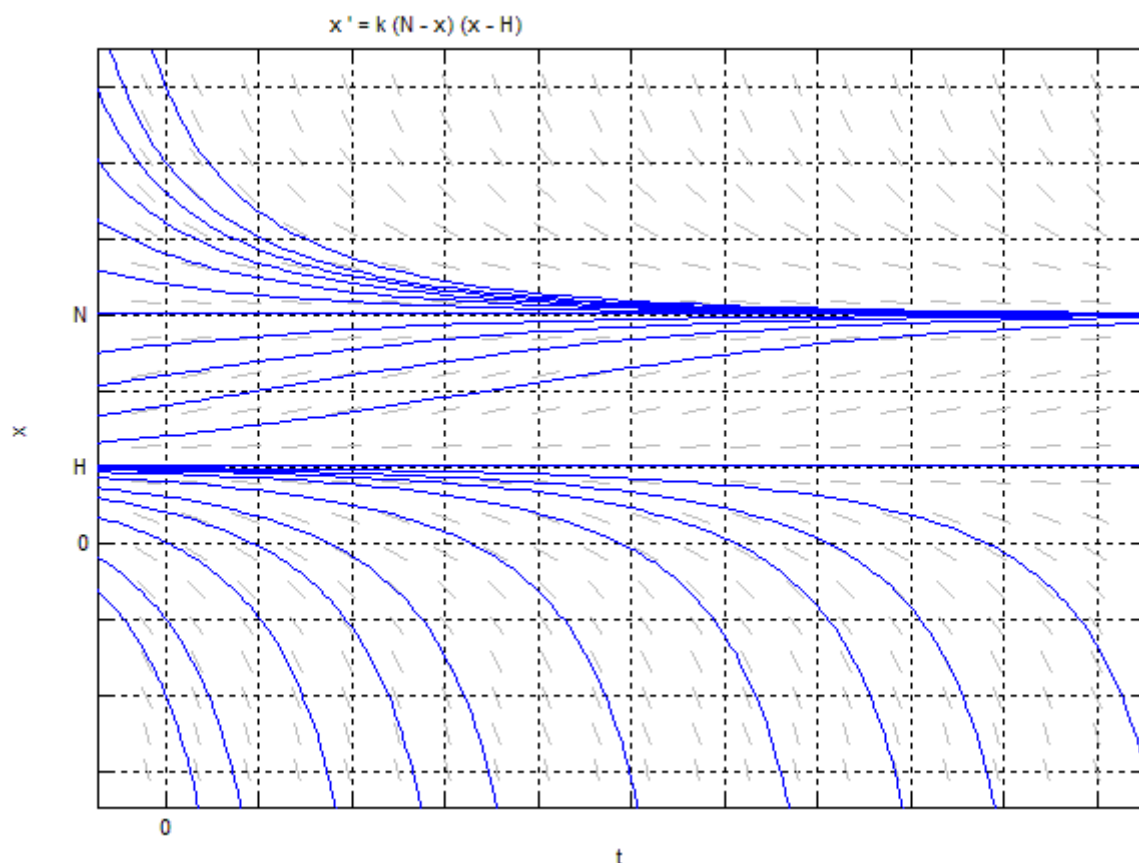


Рис. 1.8. Типові інтегральні криві логістичного рівняння зі збором врожаю

З фазової діаграми (рис. 1.9) видно, що точка рівноваги $x = N$ є стійкою, точка $x = H$ – не стійкою.

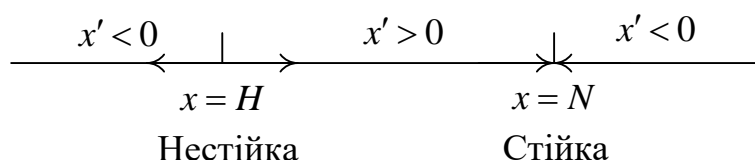


Рис. 1.9. Фазова діаграма для логістичного рівняння зі збором врожаю

Біологічна або фізична система, яка моделюється диференціальним рівнянням, може суттєво залежати від числових значень деяких коефіцієнтів або параметрів, які входять в рівняння. Наприклад, при зміні значення параметра може різко змінитися кількість точок рівноваги рівняння.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x(4 - x) - h, \quad (1.29)$$

яке моделює збір врожаю в логістичній популяції при $k = 1$ та $M = 4$ (x та M вимірюються в сотнях).

Виконаємо дослідження залежності поведінки інтегральних кривих від збору врожаю h . Гранична та порогова чисельність популяції N та H визначаються, як:

$$H, N = 2 \pm \sqrt{4 - h}. \quad (1.30)$$

Якщо $h < 4$ (від'ємні значення h можна розглядати, як завіз риби замість вилову), то існують різні рівноважні розв'язки $x(t) \equiv N$ та $x(t) \equiv H$ при $N > H$, як показано на рис. 1.8.

Якщо $h = 4$, то $N = H = 2$, так що диференціальне рівняння має тільки один єдиний рівноважний розв'язок $x(t) \equiv 2$. В цьому випадку інтегральні криві виглядають, як на рис. 1.10.

Якщо початкова чисельність x_0 (в сотнях) риби перевищує 2, то чисельність популяції наближається до граничної чисельності популяції 2.

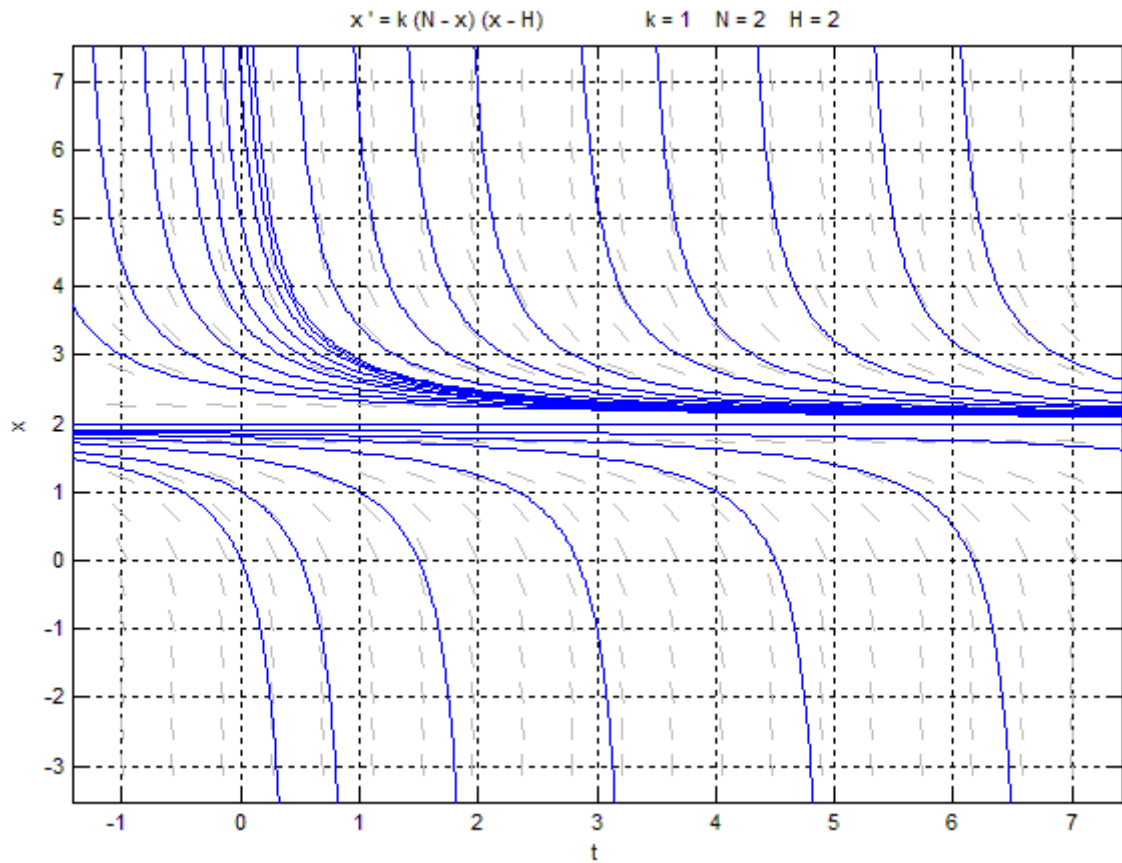


Рис. 1.10. Інтегральні криві рівняння $x' = x(4 - x) - h$ у випадку критичного збору врожаю $h = 4$

Якщо ж $h > 4$, то диференціальне рівняння (1.29) не має ніяких рівноважних розв'язків. Інтегральні криві тоді виглядають, як на рис. 1.11 та незалежно від початкової чисельності риби, популяція зникне в результаті надмірного вилову.

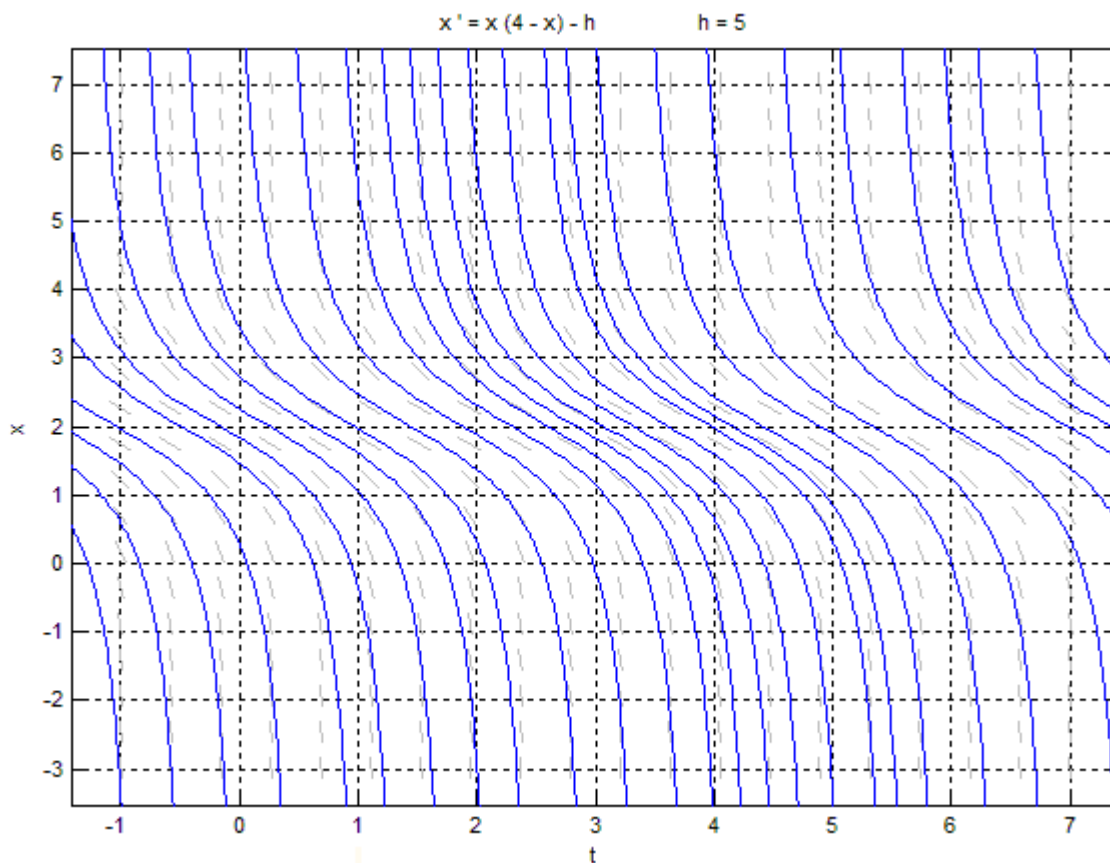


Рис. 1.11. Інтегральні криві рівняння $x' = x(4-x) - h$ у випадку надмірного збору врожаю $h = 5$

Значення $h = 4$, при якому змінюється якісний характер розв'язків при збільшенні h , називають *точкою біфуркації* (точкою подвоєння) для диференціального рівняння, що містить параметр h . Загальний спосіб візуалізувати відповідну біфуркацію розв'язків полягає в тому, щоб накреслити діаграму біфуркацій, що складається з усіх точок $(h; c)$, де c – точка рівноваги рівняння (1.29), тобто

$$c = 2 \pm \sqrt{4-h} \Leftrightarrow (c-2)^2 = 4-h. \quad (1.31)$$

Таким чином, отримуємо рівняння параболи, що показана на рис. 1.12. Ця парабола і є діаграма біфуркацій для нашого диференціального рівняння, яке моделює чисельність популяції риб з виловом на рівні, що задається параметром h .

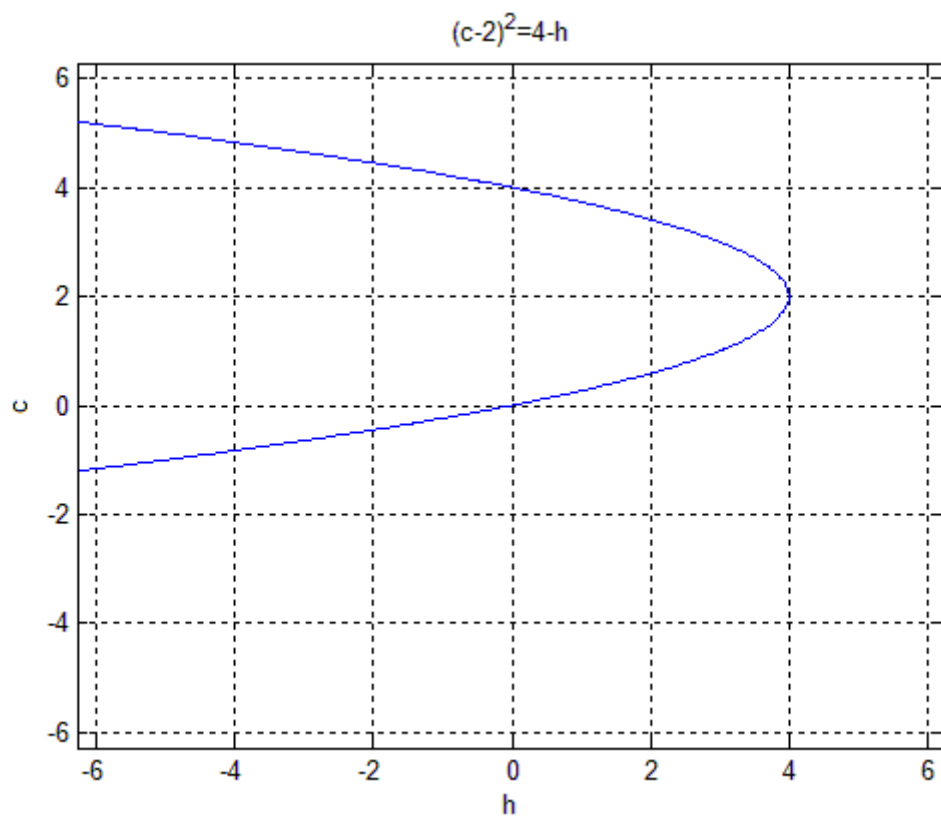


Рис. 1.12. Діаграма біфуркацій для диференціального рівняння $x' = x(4 - x) - h$

Варто відмітити, що найпростіші моделі типу прискорення-швидкість також призводять до лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Завдання на лабораторну роботу

1. Знайти розв'язок диференціального рівняння (без початкових умов), заданого за варіантом (*табл. 1.1*), в аналітичному вигляді за допомогою будь-якого математичного пакета, використовуючи спеціальні функції, що наявні в ньому.
2. Побудувати поле напрямків та декілька (близько 10) інтегральних кривих диференціального рівняння, заданого за варіантом (*табл. 1.1*).
3. Знайти аналітичний розв'язок задачі Коші (*табл. 1.1*), заданої за варіантом.
4. Розв'язати задану за варіантом задачу Коші (*табл. 1.1*):
 - ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку,змінюючи точність обчислень, що задана за замовчуванням для кожного метода.
5. На одній декартовій площині побудувати графіки отриманих розв'язків задачі Коші (графіки чисельних розв'язків мають бути побудовані у вигляді точок, які не з'єднані між собою):
 - ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
 - ✓ при аналітичному розв'язанні задачі Коші.

6. Знайти чисельний розв'язок задачі Коші, заданої за варіантом (табл. 1.2), не приводячи рівняння до нормального вигляду та побудувати його графік.

7. Знайти точки рівноваги диференціального рівняння $\frac{dx}{dt} = f(x)$,

де $f(x)$ – функція задана за варіантом (табл. 1.3). Аналітично дослідити на стійкість кожен знайдений точку рівноваги та нарисувати відповідну фазову діаграму. Побудувати поле напрямків даного диференціального рівняння та декілька інтегральних кривих і візуально перевірити стійкість кожної точки рівноваги.

8. Розв'язати задачі, задані за варіантом (табл. 1.4, табл. 1.5). Кожну числову задачу потрібно спочатку розв'язати в загальному вигляді та дослідити отриману модель (побудувати поле напрямків, кілька інтегральних кривих і т.д.), а потім з відповідними числовими даними.

9. Припустимо, що чисельність населення в певній країні змінюється за законом

$$P(t) = \frac{1}{100i} \left(i^2 e^{0.0375(t-1350)} + (t+595)^2 - 75 \cdot (t-350) \cdot i^{3.5} + 273914997 \right),$$

де i – номер варіанту, t – поточний рік.

Обчислити населення даної країни в 1800 р., 1850 р. та 1900 р. На основі отриманих статистичних даних побудувати модель Мальтуса та логістичну модель Ферхюльста зростання населення. Дослідити отримані моделі. Заповнити таблицю порівняння

моделей Мальтуса та Ферхюльста (табл. 1.6). Знайти середню похибку кожної моделі.

Вказівки щодо виконання завдання

Якщо буде обрано пакет *MatLab*, то програма має бути написана у вигляді функції з назвою *Lab_1_p* (де *p* номер варіанту). Дана функція повинна мати два вхідних та один вихідний параметр. В залежності від значення вхідних параметрів (номер рівняння, метод розв'язання) функція має присвоювати вихідному параметру розв'язок, отриманий методом Рунге-Кутта другого та третього порядку, методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку або аналітичний розв'язок. Дана функція має запускатися з командного рядка *MatLab*.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підґрунття для виконання даної лабораторної роботи.
3. Аналітичний розв’язок диференціального рівняння з п.1 завдання, отриманий одним зі спеціалізованих математичних пакетів.
4. Поле напрямків та декілька інтегральних кривих диференціального рівняння з п.2 завдання.
5. Аналітичний розв’язок задачі Коші з п.3 завдання, отриманий одним зі спеціалізованих математичних пакетів.
6. Чисельні розв’язки задачі Коші з п.4 завдання (при необхідності таблицю можна розміщувати в альбомному форматі):

Спеціалізований математичний пакет (вказати назву)			
Метод Рунге-Кутта 2–3 порядку		Метод Рунге-Кутта 4–5 порядку	
x	y	x	y

7. Графіки з п.5 завдання.
8. Чисельний розв’язок задачі Коші та його графік з п.6 завдання.
9. Процес знаходження та дослідження на стійкість точок рівноваги з п.7 завдання.
10. Поле напрямків та фазова діаграма диференціального рівняння з п.7 завдання.
11. Повний процес розв’язку задач з п.8 завдання.
12. Процес побудови та аналіз моделі з п.9 завдання.
13. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	6	9	14
2	11	10	2
3	12	11	10
4	8	12	13
5	4	13	15
6	9	14	3
7	5	15	1
8	7		

Таблиця 1.1. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
1	$y' = 2x^2 y^2$	$x_0 = 1;$ $y(x_0) = -1$	$[x_0; 5.0]$	21
2	$y' = \sqrt[3]{y}$	$x_0 = 0;$ $y(x_0) = 1$	$[x_0; 5.0]$	21
3	$y' = xy \cdot \cos \frac{x}{3} + 0.25y$	$x_0 = 5;$ $y(x_0) = 7$	$[x_0; 8.9]$	21
4	$y' = -y + \cos x$	$x_0 = -1;$ $y(x_0) = 1$	$[x_0; 3.0]$	21
5	$y' = 2xy + x$	$x_0 = 3;$ $y(x_0) = 3$	$[x_0; 4.0]$	21
6	$y' = y \sin x$	$x_0 = 15;$ $y(x_0) = 7$	$[x_0; 21.0]$	21
7	$y' = 1 + x + y + xy$	$x_0 = 1;$ $y(x_0) = 7$	$[x_0; 2.5]$	21
8	$y' = e^x + y$	$x_0 = 3;$ $y(x_0) = 1$	$[x_0; 5.0]$	21
9	$y' = \sqrt[3]{64xy}$	$x_0 = 5;$ $y(x_0) = 23$	$[x_0; 9.0]$	21
10	$y' = (1 - y) \cdot \cos x$	$x_0 = \pi;$ $y(x_0) = 5$	$[x_0; 9.0]$	21
11	$y' = y \cdot e^x$	$x_0 = 0;$ $y(x_0) = 2e$	$[x_0; 1.0]$	21
12	$y' = 2xy^2 + 3x^2 y^2$	$x_0 = -1;$ $y(x_0) = -3$	$[x_0; 3.0]$	21

Продовження табл. 1.1

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
13	$y' = y \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$	$x_0 = 0;$ $y(x_0) = 1$	$[x_0; 7.0]$	21
14	$y' = 6e^{2x-y}$	$x_0 = 1;$ $y(x_0) = 7$	$[x_0; 5.0]$	21
15	$y' = \frac{y^3 + y}{x}$	$x_0 = 2;$ $y(x_0) = 1$	$[x_0; 2.7]$	21

Таблиця 1.2. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
1	$xy' = y + 2x\sqrt{xy}$	$x_0 = 5;$ $y(x_0) = 3$	$[x_0; 7.0]$	21
2	$xy' = x^3 + 3y$	$x_0 = 3;$ $y(x_0) = 1$	$[x_0; 10.0]$	21
3	$2y \cdot y' = \frac{x}{x^2 - 16}$	$x_0 = 5;$ $y(x_0) = 9$	$[x_0; 11.0]$	21
4	$xy' - y - 2x^2y = 0$	$x_0 = 1;$ $y(x_0) = 5$	$[x_0; 1.3]$	21
5	$2\sqrt{x} \cdot y' = \cos^2 x$	$x_0 = \frac{\pi}{2};$ $y(x_0) = 3$	$[x_0; \pi]$	21
6	$y'(x^2 + 1) \cdot \operatorname{tg} y = x$	$x_0 = 1;$ $y(x_0) = 9$	$[x_0; 15.0]$	21
7	$y'y^3 - y^4 \cos x + x \sin(y') = 0$	$x_0 = 3;$ $y(x_0) = 13$	$[x_0; 11.0]$	21
8	$(1 - x^2)y' = 2y$	$x_0 = 15;$ $y(x_0) = 7$	$[x_0; 23.0]$	21
9	$yy' = x(y^2 + 1)$	$x_0 = 1;$ $y(x_0) = 3$	$[x_0; 2.0]$	21
10	$y' = \cos x - \frac{y}{\operatorname{tg} x} - \sin(y')$	$x_0 = 0.01;$ $y(x_0) = 0$	$\left[x_0; \frac{\pi}{2}\right]$	21
11	$(x^2 + 1)y' + 3x^3y = 6xe^{\frac{3x^2}{2}}$	$x_0 = 0;$ $y(x_0) = 5$	$[x_0; 3.0]$	21
12	$2xy' + y - 10\sqrt{x} = 0$	$x_0 = 1;$ $y(x_0) = 7$	$[x_0; 2.0]$	21

Продовження табл. 1.2

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
13	$(x + e^y)y' = xe^{-y} + \cos(y') - 1$	$x_0 = 3;$ $y(x_0) = 9$	$[x_0; 14.0]$	21
14	$(x^2 + 4)y' + 3xy = x$	$x_0 = 5;$ $y(x_0) = 1$	$[x_0; 19.0]$	21
15	$3y^2 \cdot y' + \sin(y') = y^3 e^{-2x} + 2xy$	$x_0 = 5;$ $y(x_0) = 1$	$[x_0; 19.0]$	21

Таблиця 1.3. Варіанти завдань

Варіант №	Функція $f(x)$
1	$x - 4$
2	$x^2 - 4x$
3	$x^2 - 4$
4	$(x - 2)^2$
5	$x^2 - 5x + 4$
6	$(x - 1)^3$
7	$3 - x$
8	$3x - x^2$
9	$9 - x^2$
10	$-(3 - x)^2$
11	$7x - x^2 - 10$
12	$(2 - x)^3$
13	$(x + 2)(x - 2)^2$
14	$x^3(x^2 - 4)$
15	$(x^2 - 4)^3$

Таблиця 1.4. Варіанти завдань

Варіант №	Задача
1	Деяке місто мало населення 25 000 людей в 1960 році, а в 1970 році чисельність його населення досягла 30 000 людей. Припустіть, що його чисельність населення продовжує зростати за експонентою зі сталою швидкістю. Яку чисельність населення його міська влада може очікувати в 2012 році?
2	В деякій культурі бактерій, кількість бактерій збільшилась в 6 разів за 10 годин. Скільки часу необхідно для того, щоб чисельність популяції подвоїлась?
3	Після народження дитини подружня пара депонувала 5000 дол. на рахунок, за яким банк платить 8% доходу, що нараховується неперервно. Дохід додається до вкладу. Скільки доларів буде нараховано на рахунок на вісімнадцятий день народження дитини?
4	Коли цукор розчиняється у воді, кількість A , яка залишилася нерозчиненою після t хвилин, задовольняє диференціальному рівнянню $\frac{dA}{dt} = -kA$ ($k > 0$). Якщо 25% цукру розчинилося за 1 хвилину, то скільки необхідно часу, щоб розчинилася половина цукру?
5	У місті з населенням 100 000 людей почала розповсюджуватись певна сумнівна інформація. Протягом тижня 10 000 людей почули чутку про це. Припустіть, що швидкість збільшення кількості тих, хто почув цю інформацію, пропорційна кількості тих, хто ще не почув її. Коли половина населення міста дізнається цю інформацію?
6	Пиріг витягається з духовки при 99°C та починає охолоджуватись при кімнатній температурі 21°C . Через 30 хвилин температура пирога дорівнює 60°C . Коли вона буде дорівнювати 37°C ?

Продовження табл. 1.4

Варіант №	Задача
7	Кількість атмосферних забруднювачів $A(t)$ в деякій гірській долині збільшується за експонентою та потроюється через кожні 7.5 років. Нехай початкова кількість дорівнює 10 одиницями забруднювача. Напишіть формулу для $A(t)$, що дає кількість (в одиницях забруднювача) забруднювача через t років. Яка кількість забруднювача (в одиницях забруднювача) буде в атмосфері долини через 5 років? Скільки часу знадобиться, щоб кількість забруднювача досягла 100 одиниць?
8	Резервуар містить 1000 літрів водного розчину 100 кг солі. Чиста вода вливається в резервуар зі швидкістю 5 літрів на секунду, рівномірно розмішується та відкачується з тією ж самою швидкістю. Скільки часу необхідно, щоб в резервуарі залишилось 10 кг солі?
9	Резервуар початково містить 60 літрів чистої води. Морська вода, що містить 0.1 кг солі в одному літрі, вливається в резервуар зі швидкістю 2 літра на хвилину, отриманий (ретельно перемішаний) розчин витікає з резервуара зі швидкістю 3 літра на хвилину; таким чином, резервуар буде порохній через 1 годину. Знайдіть кількість солі в резервуарі через t хвилин. Яка максимальна кількість солі в резервуарі?
10	Резервуар об'ємом 400 літрів спочатку містить 100 літрів морської води, що містить 15 кг солі. Морська вода, що містить 0.35 кг солі на літр вливається в резервуар зі швидкістю 5 літрів на секунду, добре перемішаний розчин витікає з резервуара зі швидкістю 3 галони на секунду. Знайдіть кількість солі в резервуарі через t секунд. Скільки солі буде містити резервуар, коли він заповниться розчином?

Продовження табл. 1.4

Варіант №	Задача
11	Нехай площа басейна дорівнює одному квадратному кілометру, а середня глибина 2 метра. Спочатку він заповнений прісною водою, але в момент часу $t = 0$ вода, що забруднена рідким забруднювачем, починає текти в басейн зі швидкістю 200 тисяч кубічних метрів на місяць. Добре перемішана вода витікає з басейну з тією самою швидкістю. Вода, що потрапляє в басейн має концентрацію $c(t) = 10$ літрів на кубічний метр. Знайти кількість $x(t)$ забруднювача (в мільйонах літрів) в басейні після t місяців. Скільки часу потрібно, щоб концентрація забруднювача в басейні досягла 5 літрів на кубічний метр?
12	Нехай площа озера дорівнює одному квадратному кілометру, а середня глибина 2 метра. Спочатку він заповнений прісною водою, але в момент часу $t = 0$ вода, що забруднена рідким забруднювачем, починає текти в басейн зі швидкістю 200 тисяч кубічних метрів на місяць. Добре перемішана вода витікає з басейну з тією самою швидкістю. Вода, що потрапляє в басейн має концентрацію $c(t) = 10(1 + \cos t)$ літрів на кубічний метр, яка змінюється між 0 та 20, причому середня концентрація дорівнює 10 л/м^3 , а період коливань трохи перевищує 6.25 місяців. Чи правда, що вміст забруднювача в озері буде коливатися навколо середнього рівня 20 мільйонів літрів? Скільки часу потрібно, щоб концентрація забруднювача в озері досягла 5 літрів на кубічний метр?
13	Припустимо, що зранку пішов сніг, причому кількість снігу, що випадав зростала зі сталою швидкістю. О 7 ранку снігозбирач почав чистити дорогу. О 8 ранку він очистив 4 кілометри, а о 9 ранку ще 3 кілометри, які залишились. Прийmemo припущення, що снігозбирач очищує сніг зі сталою швидкістю. Покажіть, що $k \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, де k – константа. Коли почав падати сніг?

Продовження табл. 1.4

Варіант №	Задача
14	<p>Озеро Ере має об'єм 480 км^3, швидкість притоку в нього (з озера Гурон) та відтоку з нього (в озеро Онтаріо) дорівнює 350 км^3 на рік. Припустимо, що в момент часу $t = 0$ (роки), концентрація забруднювача в озері Ере викликана минулими промисловим забрудненням в п'ять разів більше, ніж концентрація забруднювача в озері Гурон. Припустимо, що при відтоку вода в озері ретельно перемішується. Скільки потрібно часу, щоб концентрація забруднювача в озері Ере вдвічі перевищувала концентрацію забруднювача в озері Гурон?</p>
15	<p>Припустимо, що зранку пішов сніг, причому кількість снігу, що випадав зростала зі сталою швидкістю. О 7 ранку снігозбирач почав чистити дорогу. О 8 ранку він очистив 2 кілометри, а о 10 ранку ще 3 кілометри, які залишились. Нехай $t = 0$ в момент, коли почався сніг: через x позначимо відстань, яку пройшов снігозбирач в момент часу t. Прийmemo припущення, що снігозбирач очищує сніг зі сталою швидкістю. Покажіть, що $k \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, де k – константа. Коли почав падати сніг?</p>

Таблиця 1.5. Варіанти завдань

Варіант №	Задача
1	Швидкість зміни чисельності популяції кроликів P пропорційна квадратному кореню з P . В момент часу $t=0$ (місяці) популяція кроликів нараховує 100 та збільшується зі швидкістю 20 кроликів на місяць. Скільки кроликів буде через один рік?
2	Швидкість зміни чисельності алігаторів P популяції алігаторів у болоті пропорційна квадрату P . В болоті в 1988 році була дюжина алігаторів, а в 1998 році – дві дюжини. Коли в болоті буде чотири дюжини алігаторів? Що трапиться після цього?
3	Чисельність популяції $P(t)$ задовольняє логістичному рівнянню $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$, де $B = aP$ – кількість народжень та $D = bP^2$ – кількість смертельних випадків за одиницю часу. Нехай початкова чисельність популяції дорівнює $P(0) = P_0$ та B_0 – кількість народжень в місяць, а D_0 – кількість смертей в місяць в момент часу $t = 0$. Покажіть, що чисельність популяції обмежена числом $M = \frac{B_0 P_0}{D_0}$.
4	Популяція кроликів чисельністю $P(t)$ задовольняє логістичному рівнянню $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$, де $B = aP$ – кількість народжень та $D = bP^2$ – кількість смертельних випадків за одиницю часу. Якщо початкова чисельність популяції дорівнює 120 кроликів та в місяць народжується 8 кроликів, а помирає 6 в момент часу $t = 0$, то через скільки місяців $P(t)$ буде дорівнювати 95% граничного значення M чисельності популяції?

Продовження табл. 1.5

Варіант №	Задача
5	Чисельність популяції кроликів $P(t)$ задовольняє логістичному рівнянню $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$, де $B = aP$ – кількість народжень та $D = bP^2$ – кількість смертельних випадків за одиницю часу. Якщо початкова чисельність популяції дорівнює 240 кроликів та в місяць народжується 9 кроликів, а помирає 12 в момент часу $t=0$, то через скільки місяців $P(t)$ буде дорівнювати 105% граничного значення M чисельності популяції?
6	Припустимо, що чисельність $P(t)$ населення деякої країни задовольняє диференціальному рівнянню $\frac{dP}{dt} = kP(200 - P)$, причому k – константа. Нехай в 1940 році чисельність населення дорівнювала 100 мільйонів та зростала тоді зі швидкістю 1 мільйон на рік. Передбачте чисельність населення цієї країни в 2012 році.
7	Припустимо, що в момент часу $t=0$ половина “логістичного” населення (100 000 людей), що знаходиться у рівноважному стані, почула деяку інформацію та, що чисельність тих, хто її почув, в даний момент збільшувалась зі швидкістю 1000 людей в день. Коли цю інформацію дізнається 80% населення, якщо поширення інформації відбувається за тим самим логістичним законом, що й модель зростання населення?
8	При розчиненні солі KNO_3 в метанолі кількість $x(t)$ грамів солі у розчині через t секунд задовольняє диференціальному рівнянню $\frac{dx}{dt} = 0.8x - 0.004x^2$. Яка максимальна кількість солі буде розчинена в метанолі? Нехай $x=50$ при $t=0$. Скільки необхідно часу, щоб розчинити ще 50 г солі?

Продовження табл. 1.5

Варіант №	Задача
9	Чисельність $P(t)$ популяції маленьких гризунів має коефіцієнт народжуваності $\beta = 0.001 \cdot P$ (народжень в місяць на одного гризуна) та сталий показник смертності δ . Якщо $P(0) = 100$ та $P'(0) = 8$, через скільки місяців чисельність популяції подвоїться?
10	Чисельність $P(t)$ популяції тварин має сталий показник смертності $\delta = 0.01$ (смертельного випадка на тварину в місяць) та коефіцієнт народжуваності β пропорційний P . Припустимо, що $P(0) = 200$ та $P'(0) = 2$. Коли $P = 1000$?
11	Припустимо, що кількість алігаторів $x(t)$ (t виражено в місяцях) у болоті задовольняє диференціальному рівнянню $\frac{dx}{dt} = 0.0001x^2 - 0.01x$. Нехай спочатку в болоті є 25 алігаторів. Розв'яжіть це диференціальне рівняння та визначте, що трапиться з популяцією алігаторів в кінцевому випадку.
12	Диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10}x(10 - x) - h$ моделює логістичну популяцію зі збором врожаю за нормою h . Визначте залежність кількості точок рівноваги від параметра h , а потім побудуйте діаграму біфуркацій.
13	Диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}x(x - 5) + s$ моделює чисельність популяції з поповненням за нормою s . Визначте залежність кількості точок рівноваги від параметра s , а потім побудуйте діаграму біфуркацій.

Продовження табл. 1.5

Варіант №	Задача
14	Побудувати діаграму біфуркацій диференціального рівняння $\frac{dx}{dt} = kx - x^3$, де k – константа.
15	Припустимо, що логістичне рівняння $\frac{dx}{dt} = kx(M - x)$ моделює чисельність $x(t)$ популяції риб в озері після t місяців, протягом яких відлов риби не виконувався. Тепер припустіть, що відлов риби з озера дорівнює hx риб в місяць (причому h – додатна константа). Нехай $0 < h < kM$. Покажіть, що чисельність популяції все одно задовольняє логістичному рівнянню. Яке нове обмеження чисельності популяції? Нехай $h \geq kM$. Покажіть, що $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Таблиця 1.6. Порівняння моделі Мальтуса та логістичної моделі Ферхюльста

Рік	Фактичне населення	Моделі Мальтуса	Похибка моделі Мальтуса	Логістична модель Ферхюльста	Похибка логістичної моделі Ферхюльста
1800					
1810					
1820					
1830					
1840					
1850					
1860					
1870					
1880					
1890					
1900					
1910					
1920					
1930					
1940					
1950					
1960					
1970					
1980					
1990					
2000					
2010					

Питання для самоперевірки

1. Загальні положення та основні поняття математичного моделювання.
2. Дайте визначення звичайному диференціальному рівнянню.
3. Яке диференціальне рівняння називається лінійним? Наведіть приклади.
4. Що називають порядком звичайного диференціального рівняння?
5. Що таке фазовий простір?
6. Яку задачу називають задачею Коші?
7. Яку задачу називають задачею з граничними умовами?
8. Яким чином можна контролювати точність чисельного розв'язання задачі Коші?
9. Що є нормальною формою диференціального рівняння?
10. Яке диференціальне рівняння називається автономним? Наведіть приклади.
11. Що таке ізокліна диференціального рівняння?
12. Яким чином будується поле напрямків диференціального рівняння? Наведіть приклади поудови поля напрямків певного диференціального рівняння.
13. Які типи диференціальних рівнянь та методи їх розв'язання Ви знаєте?
14. Що таке точка рівноваги диференціального рівняння?
15. Який розв'язок диференціального рівняння є рівноважним?
16. Яким чином визначається стійкість точки рівноваги відносно початкової умови?
17. Що таке фазова діаграма диференціального рівняння? Наведіть приклади її побудови.
18. Що таке діаграма біфуркацій? Яким чином вона будується?

19. Модель Мальтуса.
20. Логістична модель Ферхюльста.
21. Логістична модель зі збором врожаю.

Використана та рекомендована література

1. *Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.* MatLab 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.: ил.
2. *C. Henry Edwards, David E. Penney* Elementary differential equations, Sixth Edition: Prentice Hall.
3. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд. испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Мета роботи: опанувати комп'ютерні засоби для розв'язання та аналізу диференціальних рівнянь вищих порядків та набути навичок побудови найпростіших математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями вищих порядків.

Теоретичні відомості

В загальному випадку лінійне диференціальне рівняння n -го порядку має вигляд

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x), \quad (1.1)$$

де $P_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ та $F(x)$ функції неперервні на деякому відкритому (можливо необмеженому) інтервалі I (на якому ми хочемо знайти розв'язок).

Якщо функція в правій частині рівняння (1.1) тотожно рівна нулю, то воно називається *однорідним* лінійним рівнянням; в іншому випадку неоднорідним.

Припустимо, що $P_0(x) \neq 0$ у всіх точках інтервалу I , тоді поділивши рівняння (1.1) на $P_0(x)$ дістанемо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку в канонічній формі

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (1.2)$$

Однорідне лінійне рівняння, що відповідає рівнянню (1.2), представляє собою рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (1.3)$$

Припустимо, що функції p_1, p_2, \dots, p_n та f неперервні на відкритому інтервалі I , що містить точку a . Тоді для будь-яких заданих n чисел b_0, b_1, \dots, b_{n-1} лінійне рівняння (1.2) має єдиний розв'язок на всьому інтервалі I , який задовольняє n початковим умовам

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}.$$

Відмітимо, що лінійне однорідне рівняння (1.3) завжди має розв'язок $y(x) \equiv 0$, який називають тривіальним і цей розв'язок є єдиним, який задовольняє тривіальним початковим умовам

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (1.3) має вигляд

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x), \quad (1.4)$$

де C_i – довільні сталі, а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (1.3). Цю властивість розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь називають принципом суперпозиції.

Коли дані n функцій є розв'язками однорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку, для перевірки лінійної залежності можна скористатися функціональним визначником Вронського (вперше був введений польським математиком Вронським у 1812 році). Відомо, що визначник Вронського n лінійно залежних функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ тотожно рівний нулю.

Позначимо літерою L оператор, в результаті дії якого на n раз диференційовну функцію $y(x)$ отримується лінійна комбінація

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \quad (1.5)$$

функції $y(x)$ та її перших n похідних.

Тоді неоднорідне рівняння (1.2) запишеться, як $Ly = f(x)$, а однорідне лінійне рівняння, що відповідає рівнянню (1.2), як $Ly = 0$.

З принципу суперпозиції розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь слідує, що оператор L є лінійним, тобто виконується наступна рівність

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ly_1 + \alpha_2 Ly_2, \quad (1.6)$$

для будь-яких констант α_1 та α_2 .

Припустимо, що відомий деякий розв'язок $y_{ч.р.н.}(x)$ рівняння $Ly = f(x)$ і що $y(x)$ інший розв'язок цього рівняння. Тоді з рівності (1.6) слідує, що

$$L(y(x) - y_{ч.р.н.}(x)) = L(y(x)) - L(y_{ч.р.н.}(x)) = f(x) - f(x) = 0,$$

тобто $y_{з.р.о.}(x) = y(x) - y_{ч.р.н.}(x)$ є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння. Тоді

$$y_{з.р.н.}(x) = y_{з.р.о.}(x) + y_{ч.р.н.}(x), \quad (1.7)$$

тобто загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння.

Для знаходження розв'язків лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами необхідно застосовувати чисельні методи або використовувати розкладання в безкінечний ряд. Але у випадку лінійного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами можливо в явному вигляді знайти необхідні n лінійно незалежних розв'язків. В загальному випадку таке рівняння має вигляд

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (1.8)$$

де коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – дійсні константи, причому $a_n \neq 0$.

Розглянемо однорідне лінійне диференціальне рівняння n -го порядку:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (1.9)$$

Спочатку спробуємо знайти один розв'язок рівняння (1.9).

Оскільки функція e^{rx} ніде не дорівнює нулю, то $y = e^{rx}$ буде розв'язком рівняння (1.9) тоді і тільки тоді, коли r є коренем рівняння

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \quad (1.10)$$

Рівняння (1.10) називається *характеристичним рівнянням* або *допоміжним рівнянням* диференціального рівняння (1.9). Таким чином задача розв'язання диференціального рівняння звелася до розв'язання звичайного алгебраїчного.

Знайшовши корені характеристичного рівняння можна записати загальний розв'язок диференціального рівняння в явному вигляді.

Нехай всі n коренів характеристичного рівняння r_1, r_2, \dots, r_n різні та дійсні. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.9) має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}. \quad (1.11)$$

Приймемо без доведення, що в тому випадку коли характеристичне рівняння має кратний корінь r кратності k , то та частина загального розв'язку диференціального рівняння (1.9), яка відповідає кореню r , має вигляд

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}) e^{rx} \quad (1.12)$$

Використовуючи формулу Ейлера не складно показати, що в тому випадку коли комплексні числа $a \pm bi$ (при $b \neq 0$) є простими коренями диференціального рівняння (1.9), то відповідна частина загального розв'язку диференціального рівняння (1.9) має вигляд

$$e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \quad (1.13)$$

Аналогічно до дійсних коренів характеристичного рівняння, якщо кратність спряжених комплексних коренів $a \pm bi$ дорівнює k , то частина загального розв'язку диференціального рівняння, що їм відповідає має вигляд

$$\begin{aligned} & (A_1 + A_2x + \dots + A_kx^{k-1})e^{(a+bi)x} + (B_1 + B_2x + \dots + B_kx^{k-1})e^{(a-bi)x} = \\ & = \sum_{p=0}^{k-1} x^p e^{ax} (c_p \cos bx + d_p \sin bx) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Для знаходження часткового розв'язку неоднорідного рівняння (1.8) можна використовувати метод невизначених коефіцієнтів.

Коли неможливо використати метод невизначених коефіцієнтів зазвичай використовують *метод варіації довільних сталих*, або інколи його називають *метод варіації параметрів*.

Механічні коливання

Розглянемо фізичне тіло (матеріальну точку) масою m , що з'єднане з пружиною, яка чинить опір, як розтягненню так і стисненню. Інший кінець пружини закріплений в стіні (рис. 2.1).

Припустимо, що тіло лежить на горизонтальній площині без тертя та те що воно може рухатись тільки вперед або назад так, що пружина при цьому стискається або розтягується. Позначимо через x відстань від тіла до його положення рівноваги – положення, при якому пружина не стиснена і не розтягнута. Будемо вважати, що $x > 0$, коли пружина розтягнута, та $x < 0$, коли вона стиснена.

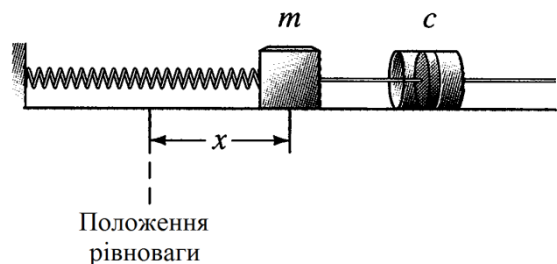


Рис. 2.1. Система, що складається з тіла заданої маси, яке закріплене на пружині з амортизатором

Згідно закону Гука, повертальна сила $F_{\text{п}}$, з якою пружина діє на тіло, пропорційна відстані x , на яку пружина розтягнута або стиснена:

$$F_{\text{п}} = -kx. \quad (1.15)$$

Додатний коефіцієнт пропорційності k називається коефіцієнтом жорсткості пружини.

Тіло, що показане на рис. 2.1 також з'єднано з амортизатором – пристроєм, що поглинає удари. Сила, з якою діє амортизатор, направлена в сторону, протилежну напрямку руху тіла масою m . Припустимо, що амортизатор влаштований так, що він діє з силою $F_{\text{а}}$, що пропорційна швидкості $v = \frac{dx}{dt}$ руху тіла, тобто

$$F_{\text{а}} = -cv = -c \frac{dx}{dt}. \quad (1.16)$$

Додатна константа c називається *сталю демпфування*, або *коефіцієнтом послаблення (поглинання, згасання)* амортизатора. В загальному випадку можна вважати, що рівняння (1.16) описує сили опору в системі, включаючи опір повітря при русі тіла масою m .

Якщо окрім сил $F_{\text{п}}$ та $F_{\text{а}}$ на тіло діють також задана зовнішня сила $F_3 = F(t)$, то рівнодіюча сил, що діють на тіло, дорівнює $F = F_{\text{п}} + F_{\text{а}} + F_3$. Використовуючи другий закон Ньютона

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = mx''$$

отримуємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$mx'' + cx' + kx = F(t), \quad (1.17)$$

яке описує рух тіла.

Якщо амортизатор відсутній (або ми просто нехтуємо силами опору), то коефіцієнт c в рівнянні (1.17) дорівнює нулю. В цьому випадку коливання називають *незгасаючими* (*незатухаючими*, *незгасними*, *невгамовними*); при $c > 0$ коливання називають *згасаючими* (*затухаючими*).

Якщо на систему зовнішні сили не діють, то $F(t)$ в рівнянні (1.17) приймаємо рівним 0. Такі коливання називають *вільними* (*власними*). У випадку $F(t) \neq 0$ коливання називають *вимушеними*.

Вільні коливання

Розглянемо спочатку *вільні незгасаючі коливання*.

У випадку, коли механічна система складається лише з тіла та пружини, а зовнішні сили та опір відсутні, рівняння (1.17) приймає більш простий вигляд

$$mx'' + kx = 0. \quad (1.18)$$

Позначимо

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.19)$$

та запишемо рівняння (1.18) у вигляді

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.20)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.20) представляє собою функцію

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (1.21)$$

Рівність (1.21) можна записати у вигляді

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha), \quad (1.22)$$

якщо прийняти $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos \alpha = \frac{A}{C}$, $\sin \alpha = \frac{B}{C}$.

Отже, тіло коливається навколо положення рівноваги, причому коливання описуються наступними параметрами: *амплітуда* C , *кутова*

швидкість (циклічна частота) ω_0 та фаза (фазовий кут, кут зсуву фаз або просто зсув по фазі) α . Такі коливання називають *гармонійними*.

Графіком залежності зміщення матеріальної точки (рис. 2.2), що виконує гармонічні коливання, від часу є графік функції

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha) = C \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{\alpha}{\omega_0}\right)\right) = C \cos(\omega_0 (t - \delta)).$$

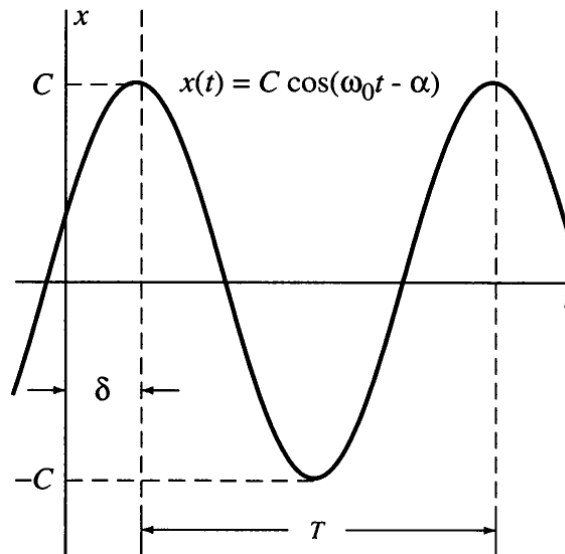


Рис. 2.2. Прості гармонічні коливання

З рис. 2.2 добре видно геометричний зміст амплітуди C , періоду T та *часової затримки*

$$\delta = \frac{\alpha}{\omega_0}. \quad (1.23)$$

Розглянемо *вільні згасаючі коливання*.

Диференціальне рівняння затухаючих коливань у випадку відсутності зовнішніх сил приймає вигляд $mx'' + cx' + kx = 0$ або

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.24)$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – кутова частота незатухаючих коливань та $p = \frac{c}{2m} > 0$.

Коренями характеристичного рівняння $r^2 + 2pr + \omega_0^2 = 0$ диференціального рівняння (1.24) є

$$r_{1,2} = -p \pm \left(p^2 - \omega_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.25)$$

Дійсні вони чи комплексні – це залежить від знака підкореневого виразу

$$p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}. \quad (1.26)$$

Тому *критичне згасання* $c_{\text{кр}}$ (в деяких випадках називається також *згасанням на границі аперіодичності* або *критичним демпфуванням*) обчислюється за формулою $c_{\text{кр}} = \sqrt{4km}$.

Вимушені коливання та резонанс

Рівняння (1.17) можливо розглядати в якості закону одномірного руху матеріальної точки масою m , що закріплена на пружині (жорсткість k) та з'єднана з амортизатором (з коефіцієнтом демпфування c), на яку також діє зовнішня сила $F(t)$. Багато механізмів з частинами, що обертаються зазвичай містять системи, що складаються з тіла, що закріплено на пружині з амортизатором, зовнішня сила в якій є гармонійною:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad \text{та} \quad F(t) = F_0 \sin \omega t, \quad (1.27)$$

де стала F_0 – амплітуда періодичної сили, а ω – її кутова частота.

Щоб зрозуміти, як виникає гармонійна сила в механізмі з частинами, що обертаються розглянемо візок з крутнем (маховиком), що обертається вертикально (рис. 2.3).

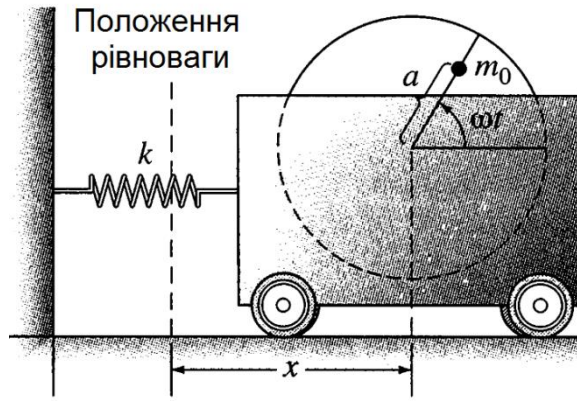


Рис. 2.3. Система, що містить візок та крутень

Нехай маса візка разом із крутнем дорівнює m , а маса крутня – m_0 . Центр мас крутня розміщений на відстані a від його геометричного центра. Кутова швидкість обертання крутня дорівнює ω (радіан на секунду). Візок прикріплений до пружини жорсткістю k . Припустимо, що центр мас візка разом без крутня розміщено прямо під геометричним центром крутня. Позначимо через $x(t)$ зміщення візка від його положення рівноваги (пружина не розтягнута і не стиснена).

Зміщення \bar{x} центра мас візка разом з крутнем запишеться таким чином:

$$\bar{x} = \frac{(m - m_0)x + m_0(x + a \cos \omega t)}{m}. \quad (1.28)$$

Нехтуючи силами опору, другий закон Ньютона можливо записати у вигляді $m\bar{x}'' = -kx$, оскільки сила дії пружини дорівнює $-kx$. Підставимо вираз для \bar{x} в останнє рівняння. Тоді отримаємо

$$mx'' - m_0 a \omega^2 \cos \omega t = -kx \Leftrightarrow mx'' + kx = m_0 a \omega^2 \cos \omega t. \quad (1.29)$$

Тому візок з крутнем, що обертається поводить себе так, як закріплене на пружині тіло, що рухається під дією зовнішньої простої гармонійної сили, амплітуда якої дорівнює $F_0 = m_0 a \omega^2$. Така система являє собою модель праски із завантаженням спереду, якщо центр мас одягу зміщений відносно

геометричного центру мас барабана. Тому дослідження рівняння (1.17) із зовнішніми силами виду (1.27) має велике практичне значення.

Розглянемо незатухаючі (коефіцієнт $c = 0$) вимушені коливання під дією зовнішньої сили $F(t) = F_0 \cos \omega t$:

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (1.30)$$

Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є функція $x_{з.р.о.}(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$, де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – кутова (циклічна) власна частота коливань системи, що складається з тіла, яке закріплене на пружині. Припустимо спочатку, що зовнішня та власна частоти не рівні: $\omega \neq \omega_0$.

Щоб знайти частковий розв'язок, підставимо $x_{ч.р.н.}(t) = A \cos \omega t$ в рівняння (1.30). В результаті отримаємо

$$-m\omega^2 A \cos \omega t + kA \cos \omega t = F_0 \cos \omega t, \quad (1.31)$$

звідки

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.32)$$

Тоді

$$x_{ч.р.н.}(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (1.33)$$

Отже, загальний розв'язок $x_{з.р.н.}(t) = x_{з.р.о.}(t) + x_{ч.р.н.}(t)$ має вигляд

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad (1.34)$$

де сталі C_1 та C_2 визначаються початковими умовами $x(0)$ та $x'(0)$.

Рівняння (1.34) можна переписати у вигляді

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (1.35)$$

Тому результуючий рух є суперпозицією двох коливань: одного з власною частотою ω_0 , а іншого – з частотою ω зовнішньої сили.

Якщо ми будемо вимагати, щоб рівняння (1.34) задовольняло умовам $x(0) = x'(0) = 0$, то отримаємо

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \quad (1.36)$$

Припустимо тепер, що $\omega \approx \omega_0$, тому $\omega_0 + \omega$ значно більше ніж $|\omega_0 - \omega|$. В цьому випадку рівняння (1.36) можна розглядати, як часті коливання з кутовою частотою $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$,

$$x(t) = A(t) \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}, \quad (1.37)$$

але з амплітудою, що повільно змінюється

$$A(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}. \quad (1.38)$$

Часті коливання із порівняно повільною періодичною зміною амплітуди демонструють явище *биття*.

Наприклад, при $m = 0.1$, $F_0 = 50$, $\omega_0 = 55$ та $\omega = 45$ з рівняння (1.36) отримаємо

$$x(t) = \sin 5t \cdot \sin 50t. \quad (1.39)$$

На рис. 2.4 зображені відповідні коливання з частотою $\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} = 50$, які “модулюються” амплітудною функцією $A(t) = \sin 5t$ з частотою $\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} = 5$.

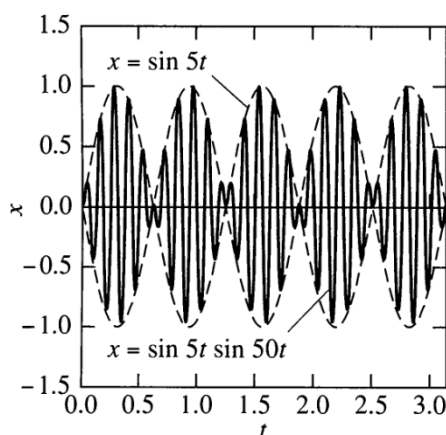


Рис. 2.4. Явище биття

З рівняння (1.33) видно, що коли власна частота ω_0 приблизно рівна зовнішній частоті ω , то амплітуда A розв'язку $x_{ч.р.н.}(t)$ велика. Іноді корисно записати вираз (1.32) у вигляді

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \pm \frac{\rho F_0}{k}. \quad (1.40)$$

В рівнянні (1.40) вираз $\frac{F_0}{k}$ називається *статичним зміщенням* пружини жорсткості k під дією сталої сили F_0 , а ρ – *коефіцієнт підсилення*; за визначенням ін. дорівнює

$$\rho = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right|}. \quad (1.41)$$

Очевидно, що $\rho \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \omega_0$. Це явище *резонансу* – необмежене зростання амплітуди коливань системи з власною частотою ω_0 під дією зовнішньої сили з частотою $\omega \approx \omega_0$ (при відсутності сил опору).

Ми припускали, що $\omega \neq \omega_0$. Чого ж можливо очікувати, коли ω та ω_0 співпадуть? Тоді рівняння (1.30), після ділення всіх доданків на m , прийме вигляд

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t. \quad (1.42)$$

Оскільки $\cos \omega_0 t$ є доданком загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, у відповідності до методу невизначених коефіцієнтів необхідно шукати частковий розв'язок у вигляді

$$x_{ч.р.н.}(t) = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t). \quad (1.43)$$

Підставимо цей вираз в рівняння (1.42) та отримаємо, що $A=0$ та $B = \frac{F_0}{2m\omega_0}$. Таким чином, частковим розв'язком є функція

$$x_{ч.р.н.}(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \quad (1.44)$$

З графіка часткового розв'язку неоднорідно рівняння (рис. 3.8), де прийнято $m=1$, $F_0=100$, $\omega_0=50$, добре видно, як необмежено має зростати амплітуда коливань у випадку *чистого резонансу*, тобто при $\omega = \omega_0$. Можливо розглядати це явище, як підсилення власних коливань системи під дією зовнішніх коливань тієї ж частоти.

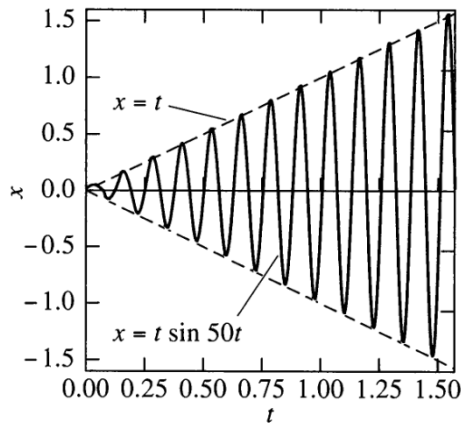


Рис. 2.5. Явище резонансу

Розглянемо *вимушені згасаючі коливання*.

В реальних фізичних системах завжди присутнє згасання, що викликане тертям або чим-небудь ще. Загальний розв'язок $x_{з.р.о.}(t)$ однорідного рівняння, що відповідає рівнянню

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1.45)$$

дається різними рівностями (розглянутими в п. 3.1), в залежності від того, яка з нерівностей $c > c_{кр} = \sqrt{4km}$, $c = c_{кр}$ або $c < c_{кр}$ справджується. Конкретний вигляд цих розв'язків нас зараз не цікавить, а важливим є те, що у всіх випадках $x_{з.р.о.}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Тому $x_{з.р.о.}(t)$ буде перехідною складовою розв'язку рівняння (1.45), тобто складовою, яка з часом зникає, залишаючи лише частковий розв'язок $x_{ч.р.н.}(t)$.

Згідно методу невизначених коефіцієнтів в рівняння (1.45) можна підставити функцію

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Звідки отримуємо

$$A = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}, \quad B = \frac{c\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}. \quad (1.46)$$

Тоді усталені періодичні коливання

$$x_{ч.р.н.}(t) = C \cos(\omega t - \alpha) \quad (1.47)$$

мають амплітуду

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}. \quad (1.48)$$

З рівностей (1.46) слідує, що фазовий кут α лежить в першій або другій чверті. Тому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A} = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \text{ при } 0 < \alpha < \pi, \quad (1.49)$$

звідки

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} & \text{при } k > m\omega^2, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} & \text{при } k < m\omega^2, \end{cases} \quad (1.50)$$

причому $\alpha = \frac{\pi}{2}$ при $k = m\omega^2$.

Відмітимо, що коли $c > 0$, то “вимушена амплітуда”, тобто функція $C(\omega)$, задана формулою (1.48), завжди залишається скінченною, на відміну від того, що відбувається у випадку резонансу при відсутності згасання. Однак вимушена амплітуда може досягти максимуму для деяких значень ω . Тоді ми говоримо про *практичний резонанс*.

Для того, щоб побачити коли виникає практичний резонанс, потрібно лише побудувати графік $C(\omega)$ та знайти глобальний максимум.

Завдання на лабораторну роботу

1. Знайти розв'язок диференціальних рівнянь (без початкових умов), заданих за варіантом (*табл. 2.1, табл. 2.2*), в аналітичному вигляді за допомогою будь-якого математичного пакета, використовуючи спеціальні функції, що наявні в ньому.
2. Знайти аналітичний розв'язок задач Коші (*табл. 2.1, табл. 2.2*), заданих за варіантом, за допомогою будь-якого математичного пакета, використовуючи спеціальні функції, що наявні в ньому.
3. Розв'язати задані за варіантом задачі Коші (*табл. 2.1, табл. 2.2*):
 - ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку,змінюючи точність обчислень, що задана за замовчуванням для кожного метода.
4. На декартовій площині №1 побудувати графіки отриманих розв'язків першої задачі Коші (графіки чисельних розв'язків мають бути побудовані у вигляді точок, які не з'єднані між собою):
 - ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
 - ✓ при аналітичному розв'язанні задачі Коші за допомогою математичного пакету.

5. На декартовій площині №2 побудувати графіки отриманих розв'язків другої задачі Коші (графіки чисельних розв'язків мають бути побудовані у вигляді точок, які не з'єднані між собою):
- ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
 - ✓ при аналітичному розв'язанні задачі Коші за допомогою математичного пакету.
6. Сформулювати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами та певні початкові умови (задачу Коші), яке за прийнятний час не розв'язується аналітично за допомогою математичних пакетів, але легко знаходиться його чисельний розв'язок.
7. Розв'язати задачу Коші з п.6:
- ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
 - ✓ будь-яким іншим чисельним методом.
- змінюючи точність обчислень, що задана за замовчуванням для кожного метода.
8. На декартовій площині №3 побудувати графіки (у вигляді точок, які не з'єднані між собою) отриманих розв'язків задачі Коші з п.7:
- ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
 - ✓ будь-яким іншим чисельним методом.

9. Розв'язати задачу, задану за варіантом (табл. 2.3), при необхідності дозволяється використовувати математичні пакети.

Вказівки щодо виконання завдання

Якщо буде обрано пакет *MatLab*, то програма має бути написана у вигляді функції з назвою *Lab_2_p* (де *p* номер варіанту). Дана функція повинна мати два вхідних та один вихідний параметр. В залежності від значення вхідних параметрів (номер рівняння, метод розв'язання) функція має присвоювати вихідному параметру розв'язок, отриманий методом Рунге-Кутта другого та третього порядку, методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку або аналітичний розв'язок. Дана функція має запускатися з командного рядка *MatLab*.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підґрунття для виконання даної лабораторної роботи.
3. Аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь з п.1 – 2 завдання.
4. Чисельні розв'язки задач Коші з п.3 завдання (при необхідності таблиці можна розміщувати в альбомному форматі):

Спеціалізований математичний пакет (вказати назву)			
Метод Рунге-Кутта 2–3 порядку		Метод Рунге-Кутта 4–5 порядку	
x	y	x	y

5. Графіки з п.4 та п.5 завдання.
6. Чисельні розв'язки задачі Коші з п.7 завдання (при необхідності таблицю можна розміщувати в альбомному форматі):

Спеціалізований математичний пакет (вказати назву)			
Метод Рунге-Кутта 2–3 порядку		Метод Рунге-Кутта 4–5 порядку	
x	y	x	y

7. Графіки з п.8 завдання.
8. Процес розв'язку задач з п.9 завдання.
9. Висновки по кожному пункту завдання.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	3	7	6
2	9	8	2
3	7	9	8
4	1	10	11
5	10	11	4
6	5		

Таблиця 2.1. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
1	$y'' - 4y' - 3y = -5\cos x$	$x_0 = 0.00;$ $y(x_0) = 7.00;$ $y'(x_0) = 11.00$	$[x_0; 9.5]$	21
2	$5y'' + 3y' = -5x^2 \cos x$	$x_0 = 1.00;$ $y(x_0) = 5.00;$ $y'(x_0) = 17.00$	$[x_0; 10.0]$	21
3	$7y'' - 2y' = -3x^2 \cos 2x - x^3$	$x_0 = 5.00;$ $y(x_0) = 15.00;$ $y'(x_0) = 27.00$	$[x_0; 17.0]$	21
4	$-5y'' + 3y' = 5x^3 - 5x \cdot \cos 3x$	$x_0 = 3.00;$ $y(x_0) = 5.00;$ $y'(x_0) = 7.00$	$[x_0; 13.0]$	21
5	$3y'' + 4y' = -7x^2 - 5\cos 7x$	$x_0 = 13.00;$ $y(x_0) = 45.00;$ $y'(x_0) = 71.00$	$[x_0; 23.0]$	21
6	$y'' + 5y' = 5x^2 \cdot \sin x - 4x \cdot \cos 2x$	$x_0 = 13.00;$ $y(x_0) = 3.00;$ $y'(x_0) = 1.00$	$[x_0; 17.0]$	21
7	$5y'' + 3y' = 2e^x - 2x \cdot \cos 3x$	$x_0 = 23.00;$ $y(x_0) = 13.00;$ $y'(x_0) = 15.00$	$[x_0; 27.0]$	21
8	$17y'' - y' = 5x^3 \sin 7x - 4\cos 5x$	$x_0 = 13.00;$ $y(x_0) = 3.00;$ $y'(x_0) = 1.00$	$[x_0; 17.0]$	21

Продовження табл. 2.1

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
9	$y'' - 5y' = -4x^2 \cdot \cos 7x - 5x^3 \cdot \sin x$	$x_0 = 3.00;$ $y(x_0) = 13.00;$ $y'(x_0) = 11.00$	$[x_0; 9.0]$	21
10	$y'' + 5y' = 7x^3 \sin 3x - 4x^2 \cos 9x$	$x_0 = 13.00;$ $y(x_0) = 3.00;$ $y'(x_0) = 17.50$	$[x_0; 19.0]$	21
11	$y'' - 5y' = -4x^2 \cos 7x + 5x^3 \sin x$	$x_0 = 13.70;$ $y(x_0) = 11.30;$ $y'(x_0) = 5.00$	$[x_0; 9.0]$	21

Таблиця 2.2. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
1	$y''' - 4y'' + 3y = \sin x$	$x_0 = 5.00$; $y(x_0) = 7.00$; $y'(x_0) = 11.00$; $y''(x_0) = 3.00$	$[x_0; 9.5]$	21
2	$y''' + 5y'' + 3y' = x \cdot \sin x$	$x_0 = 4.00$; $y(x_0) = 5.00$; $y'(x_0) = 13.00$; $y''(x_0) = 15.00$	$[x_0; 9.0]$	21
3	$2y''' + 5y'' = x \cdot \sin x - x^2$	$x_0 = 3.00$; $y(x_0) = 4.50$; $y'(x_0) = 13.50$; $y''(x_0) = 12.10$	$[x_0; 19.0]$	21
4	$4y''' - 5y' = 3x^2 - 8x \cdot \sin x$	$x_0 = 4.00$; $y(x_0) = 5.70$; $y'(x_0) = 3.50$; $y''(x_0) = 2.10$	$[x_0; 21.0]$	21
5	$y''' + 12y' - 13y = x^3 - 8x \cdot \sin 2x$	$x_0 = 5.00$; $y(x_0) = 5.70$; $y'(x_0) = 13.50$; $y''(x_0) = 12.15$	$[x_0; 11.0]$	21
6	$5y''' - 5y = 3x \cdot e^x - 8x \cdot \sin x$	$x_0 = 3.00$; $y(x_0) = 5.70$; $y'(x_0) = 13.50$; $y''(x_0) = 12.10$	$[x_0; 23.0]$	21

Продовження табл. 2.2

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
7	$3y''' - y'' = 3x^2 \cdot e^x - 8x \cdot \cos x$	$x_0 = 3.00;$ $y(x_0) = 5.70;$ $y'(x_0) = 13.50;$ $y''(x_0) = 12.10$	$[x_0; 23.0]$	21
8	$y''' + 17y' = 3x \cdot e^{-2x}$	$x_0 = 5.00;$ $y(x_0) = 15.70;$ $y'(x_0) = 43.50;$ $y''(x_0) = 32.10$	$[x_0; 13.0]$	21
9	$y''' + y' = 3x \cdot e^{-2x} - 3x^2 \cdot e^x - x^3$	$x_0 = 15.00;$ $y(x_0) = 5.90;$ $y'(x_0) = 13.70;$ $y''(x_0) = 31.50$	$[x_0; 27.0]$	21
10	$4y''' + 3y'' - 8y' - 7y =$ $= -3x \cdot e^{-5x} - 3x^3 \cdot e^{-x}$	$x_0 = 13.40;$ $y(x_0) = 15.10;$ $y'(x_0) = 53.70;$ $y''(x_0) = 41.30$	$[x_0; 17.5]$	21
11	$y''' - 5y'' =$ $= 3x \cdot e^{-2x} - 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot \cos x$	$x_0 = 41.00;$ $y(x_0) = 1.90;$ $y'(x_0) = 17.30;$ $y''(x_0) = 1.50$	$[x_0; 42.0]$	21

Таблиця 2.3. Варіанти завдань

Варіант №	Задача
1	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 9x = 10\cos 2t$ <p>з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти рівняння руху тіла $x(t)$. Подати його у вигляді суми двох коливань одного з власною частотою ω_0, а іншого – з частотою ω зовнішньої сили. Побудувати інтегральну криву розв’язку $x(t)$ та відмітити на графіку період коливань.</p>
2	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 100x = 225\cos 2t + 300\sin 5t$ <p>з початковими умовами $x(0) = 375$, $x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти рівняння руху тіла $x(t)$. Подати його у вигляді суми двох коливань одного з власною частотою ω_0, а іншого – з частотою ω зовнішньої сили. Побудувати інтегральну криву розв’язку $x(t)$ та відмітити на графіку період коливань.</p>
3	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 4x = 5\cos 3t$ <p>з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти рівняння руху тіла $x(t)$. Подати його у вигляді суми двох коливань одного з власною частотою ω_0, а іншого – з частотою ω зовнішньої сили. Побудувати інтегральну криву розв’язку $x(t)$ та відмітити на графіку період коливань.</p>

Продовження табл. 2.3

Варіант №	Задача
4	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 25x = 90\cos 4t$ <p>з початковими умовами $x(0) = 0$, $x'(0) = 90$.</p> <p>Знайти рівняння руху тіла $x(t)$. Подати його у вигляді суми двох коливань одного з власною частотою ω_0, а іншого – з частотою ω зовнішньої сили. Побудувати інтегральну криву розв'язку $x(t)$ та відмітити на графіку період коливань.</p>
5	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 4x' + 5x = 10\cos 3t$ <p>з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти (і побудувати графік) усталений періодичний розв'язок даного диференціального рівняння та тієї перехідної складової розв'язку, що задовольняє початковим умовам.</p>
6	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 6x' + 13x = 10\cos 5t$ <p>з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти (і побудувати графік) усталений періодичний розв'язок даного диференціального рівняння та тієї перехідної складової розв'язку, що задовольняє початковим умовам.</p>

Продовження табл. 2.3

Варіант №	Задача
7	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 2x' + 26x = 600 \cos 10t$ <p>з початковими умовами $x(0) = 10$, $x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти (і побудувати графік) усталений періодичний розв'язок даного диференціального рівняння та тієї перехідної складової розв'язку, що задовольняє початковим умовам.</p>
8	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 8x' + 25x = 200 \cos t + 520 \sin t$ <p>з початковими умовами $x(0) = -30$, $x'(0) = -10$.</p> <p>Знайти (і побудувати графік) усталений періодичний розв'язок даного диференціального рівняння та тієї перехідної складової розв'язку, що задовольняє початковим умовам.</p>
9	<p>Параметри системи, що складається з тіла, закріпленого на пружині, з амортизатором: $m = 1$, $c = 2$, $k = 2$, $F_0 = 2$. Зовнішня сила має вигляд $F_3(t) = F_0 \cos \omega t$. Необхідно дослідити можливість практичного резонансу в цій системі. Зокрема, знайти амплітуду $C(\omega)$ усталених періодичних вимушених коливань з частотою ω та побудувати графік $C(\omega)$ і знайти частоту практичного резонансу ω (якщо така частота існує).</p>
10	<p>Параметри системи, що складається з тіла, закріпленого на пружині, з амортизатором: $m = 1$, $c = 6$, $k = 45$, $F_0 = 50$. Зовнішня сила має вигляд $F_3(t) = F_0 \cos \omega t$. Необхідно дослідити можливість практичного резонансу в цій системі. Зокрема, знайти амплітуду $C(\omega)$ усталених періодичних вимушених коливань з частотою ω та побудувати графік $C(\omega)$ і знайти частоту практичного резонансу ω (якщо така частота існує).</p>

Продовження табл. 2.3

Варіант №	Задача
11	<p>Параметри системи, що складається з тіла, закріпленого на пружині, з амортизатором: $m=1$, $c=10$, $k=650$, $F_0=100$. Зовнішня сила має вигляд $F_z(t)=F_0 \cos \omega t$. Необхідно дослідити можливість практичного резонансу в цій системі. Зокрема, знайти амплітуду $C(\omega)$ усталених періодичних вимушених коливань з частотою ω та побудувати графік $C(\omega)$ і знайти частоту практичного резонансу ω (якщо така частота існує).</p>

Питання для самоперевірки

1. Яке диференціальне рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку? Навести приклад.
2. Яке диференціальне рівняння називається однорідним лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку? Навести приклад.
3. Яке диференціальне рівняння називається неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку? Навести приклад.
4. Що таке канонічна форма неоднорідного лінійного диференціального рівняння вищого порядку? Навести приклад.
5. Що таке фундаментальна система розв'язків лінійного диференціального рівняння вищого порядку?
6. Що таке загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку?
7. Чому дорівнює загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння вищого порядку?
8. Поняття визначника Вронського та його застосування.
9. Навести приклад неоднорідного лінійного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами.

10. Як будується характеристичне рівняння?
11. Метод невизначених коефіцієнтів пошуку часткового розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння вищого порядку.
12. Які механічні коливання називаються вільними?
13. Які механічні коливання називаються вимушеними?
14. Поняття резонансу та практичного резонансу в механічних системах.
15. Відповідність механічних та електричних систем.

Використана та рекомендована література

1. *Лазарев Ю.* Моделирование процессов и систем в MatLab. Учебный курс. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2005. – 512 с.: ил.
2. *Маликов Р.Ф.* Основы математического моделирования. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2010. – 368 с.: ил.
3. *C. Henry Edwards, David E. Penney* Elementary differential equations, Sixth Edition: Prentice Hall.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Мета роботи: опанувати комп'ютерні засоби для розв'язання та аналізу систем диференціальних рівнянь та набути навичок побудови найпростіших математичних моделей, що описуються системами диференціальних рівнянь.

Теоретичні відомості

В багатьох додатках зустрічаються звичайні диференціальні рівняння, що містять дві або більше невідомих функцій, що залежать від однієї змінної (зазвичай від часу). Такі задачі природно зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь.

З практичної та теоретичної точки зору важливим є той факт що будь-яка нормальна система диференціальних рівнянь вищого порядку може бути перетворена в еквівалентну систему рівнянь першого порядку.

Щоб описати виконання такого перетворення, розглянемо “систему”, що складається з одного рівняння n -го порядку

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right). \quad (1.51)$$

Введемо нові залежні змінні x_1, x_2, \dots, x_n наступним чином:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)}, \quad (1.52)$$

звідки $x_1' = x' = x_2$, $x_2' = x'' = x_3$ і т.д. Таким чином рівняння (1.51) перетворюється в систему n диференціальних рівнянь першого порядку

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array} \right. \quad (1.53)$$

Дуже зручно використовувати цей прийом коли потрібно розв'язати деяке нелінійне рівняння, наприклад

$$x'' = x^3 + (x')^3. \quad (1.54)$$

Система першого порядку, що відповідає рівнянню (1.54) має вигляд

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = (x_1)^3 + (x_2)^3. \end{cases} \quad (1.55)$$

Розглянемо, наприклад, систему лінійних диференціальних рівнянь (СЛДР) першого порядку

[illegible]

Розв'язком системи рівнянь (1.56) є кортеж з n функцій $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, які на деякому інтервалі тотожно задовольняють кожному з рівнянь (1.56).

Найпростіший спосіб розв’язання СЛДР полягає у виключенні невідомих функцій за допомогою додавання двох рівнянь, попередньо помножених на відповідні множники. Мета цієї процедури послідовне виключення невідомих функцій доти поки не залишиться лише одне

рівняння, що містить лише одну невідому функцію. Це рівняння зазвичай є лінійним рівнянням вищого порядку і часто може бути розв'язане розглянутими нами методами. В той же час цей метод є зручним при розв'язанні достатньо малих систем, які містять не більше ніж два-три рівняння, але для більшості систем більш зручними є матричні методи. Тому ми не будемо зупинятися на методі виключення, а одразу переходимо до матричних методів.

Надалі, здебільшого ми будемо використовувати матричні позначення для спрощення обчислень, особливо тих, які є складними в скалярній нотації.

Таким чином СЛДР (1.56) приймає вигляд одного матричного рівняння

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (1.57)$$

де $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]$ – матриця коефіцієнтів, $\mathbf{x} = [x_i]$ та $\mathbf{f}(t) = [f_i(t)]$ – вектор-стовпці.

Загальна теорія СЛДР виду (1.57) аналогічна теорії одного рівняння n -го порядку.

Щоб дослідити, спочатку загальний характер розв'язків рівняння (1.57), ми спочатку розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \quad (1.58)$$

яке має вид рівняння (1.57), якщо в ньому покласти $\mathbf{f}(t) \equiv 0$.

Нехай $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ – це n розв'язків однорідного лінійного рівняння (1.58) на відкритому інтервалі I . Якщо c_1, c_2, \dots, c_n – константи, то лінійна комбінація

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t) \quad (1.59)$$

також є загальним розв'язком однорідного рівняння (1.58) на I .

Загальний розв'язок рівняння (1.59) може бути записаний в такій формі:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}, \quad (1.60)$$

де

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n(t)] \quad (1.61)$$

матриця розміром $n \times n$, вектор-стовпці якої представляють собою лінійно незалежні розв'язки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, причому $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]^T$ – вектор коефіцієнтів в лінійній комбінації (1.59).

Відмітимо, що лінійна незалежність для векторнозначних функцій визначена так само, як і для дійсних. Як і для випадку єдиного рівняння n -го порядку, існує детермінант Вронського, який дозволяє встановити лінійну незалежність n розв'язків однорідного рівняння (1.58).

Припустимо, що потрібно розв'язати задачу Коші

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \quad (1.62)$$

із заданим початковим вектором $\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T$.

Тоді, згідно рівності (1.60) достатньо розв'язати СЛАР

$$\mathbf{X}(a)\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (1.63)$$

щоб знайти коефіцієнти c_1, c_2, \dots, c_n в рівності (1.59).

Повернемось до неоднорідної СЛДР (1.57).

Загальний розв'язок рівняння (1.57) має вигляд

$$\mathbf{x}_{z.p.n.}(t) = \mathbf{x}_{z.p.o.}(t) + \mathbf{x}_{ч.p.n.}(t), \quad (1.64)$$

де $\mathbf{x}_{ч.p.n.}(t)$ – який-небудь частковий розв'язок рівняння (1.57), а $\mathbf{x}_{z.p.o.}(t)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (1.58).

Розглянемо метод власних значень для розв'язання однорідних СЛДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.65)$$

де $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

Можна припустити, що вектори розв'язку мають вигляд

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ \dots \\ v_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda t} = \mathbf{v} e^{\lambda t}, \quad (1.66)$$

де $\lambda, v_1, v_2, \dots, v_n$ – скалярні константи.

Після підстановки пробного розв'язку $\mathbf{x} = \mathbf{v} e^{\lambda t}$ та його похідної $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{v} e^{\lambda t}$ в рівняння (1.65) отримаємо

$$\lambda \mathbf{v} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{v} e^{\lambda t} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (1.67)$$

Це означає, що вектор $\mathbf{x} = \mathbf{v} e^{\lambda t}$ буде нетривіальним розв'язком рівняння (1.65) при умові, що вектор \mathbf{v} відмінний від нуля та λ є такою константою, що виконується рівність (1.67).

Перепишемо рівність (1.67) в формі

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = 0. \quad (1.68)$$

При заданому λ це система n однорідних лінійних рівнянь з невідомими v_1, v_2, \dots, v_n . Система (1.68) має нетривіальні розв'язки тоді та тільки тоді, коли детермінант її матриці коефіцієнтів перетворюється в нуль, тобто

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (1.69)$$

Отже, якщо λ буде власним значенням матриці коефіцієнтів \mathbf{A} лінійної системи першого порядку

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.70)$$

а власний вектор \mathbf{v} відповідає λ , то

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} \quad (1.71)$$

є нетривіальним розв'язком системи.

Алгоритмічно метод власних значень, що дозволяє знайти розв'язки однорідної системи зі сталими коефіцієнтами (1.65), можна подати таким чином:

1. Розв'язати характеристичне рівняння (1.69) та знайти власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матриці \mathbf{A} .
2. Спробувати знайти n лінійно незалежних власних векторів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, що відповідають цим власним значенням.
3. Виконати крок 2 не завжди можливо, але коли це можливо, ми отримуємо n лінійно незалежних розв'язків

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}. \quad (1.72)$$

В цьому випадку загальний розв'язок системи (1.65) представляє собою лінійну комбінацію

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t) \quad (1.73)$$

цих n розв'язків.

Перед тим як перейти до неоднорідних лінійних систем необхідно розглянути поняття фундаментальної матриці системи та експоненціальної функції від матриці.

Фундаментальною матрицею однорідної лінійної системи

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.74)$$

є матриця $\mathbf{X} = \Phi(t)$, яка задовольняє матричному диференціальному рівнянню

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (1.75)$$

та складається з n лінійно незалежних розв'язків системи (1.74), тобто

$$\Phi(t) = [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n(t)]. \quad (1.76)$$

Оскільки вектор-стовпці фундаментальної матриці $\Phi(t)$, то ця матриця є несингулярною та має обернену $\Phi(t)^{-1}$.

Використовуючи фундаментальну матрицю $\Phi(t)$ загальний розв'язок системи (1.74) можна записати таким чином:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}, \quad (1.77)$$

де $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]^T$ – довільний сталий вектор.

Щоб розв'язок (1.77) задовольняв початковій умові

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.78)$$

достатньо вибрати вектор коефіцієнтів у (1.77) так, щоб $\Phi(0)\mathbf{c} = \mathbf{x}_0$, тобто

$$\mathbf{c} = \Phi(0)^{-1} \mathbf{x}_0, \quad (1.79)$$

тоді

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (1.80)$$

Перевага застосування фундаментальної матриці полягає в тому, що коли ми знаємо фундаментальну матрицю $\Phi(t)$ та обернену $\Phi(0)^{-1}$, ми можемо легко обчислити за допомогою множення матриць розв'язки, що задовольняють різним початковим умовам.

Розглянемо можливість побудови фундаментальної матриці для лінійної системи зі сталими коефіцієнтами (1.74) безпосередньо за допомогою матриці \mathbf{A} коефіцієнтів, тобто без попереднього застосування

описаних раніше методів знаходження лінійно незалежної системи векторів-розв'язків.

Ми знаємо, що експоненціальні функції грають центральну роль в розв'язку лінійних диференціальних рівнянь та їх систем. Визначимо експоненціальні функції матриць таким способом, що

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (1.81)$$

буде матричним розв'язком матричного диференціального рівняння (1.75) з матрицею коефіцієнтів \mathbf{A} .

Так само, як експоненціальна функція комплексного числа, експонента матриці $e^{\mathbf{A}}$ може бути визначена за допомогою експоненціального ряду

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots, \quad (1.82)$$

де \mathbf{I} – одинична матриця, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\mathbf{A}^2$, ..., $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^n$ і т.д.

Експонента матриці $e^{\mathbf{A}}$ є визначеною для кожної квадратної матриці.

З рівності (1.82) зрозуміло, що коли $\mathbf{0}$ – нульова матриця розміром $n \times n$, то $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$.

Легко показати, що значення експоненціальної функції від діагональної матриці розміром $n \times n$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

дорівнює діагональній матриці розміру $n \times n$

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{bmatrix}, \quad (1.84)$$

що отримується піднесення основи натурального логарифму до степеня, що дорівнює відповідному діагональному елементу \mathbf{D} .

Є допустимим почленне диференціювання розкладення в ряд функції $e^{\mathbf{A}t}$, звідки можемо записати

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}. \quad (1.85)$$

Таким чином, матрична (матричнозначна) функція

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (1.86)$$

задовольняє диференціальне рівняння (1.75).

Оскільки матриця $e^{\mathbf{A}t}$ є несингулярною, то вона є фундаментальною матрицею лінійної системи (1.74). Зокрема, саме ця фундаментальна матриця задовольняє умову $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$.

Тому можна зробити висновок, що розв'язок задачі Коші

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.87)$$

дає формула

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0, \quad (1.88)$$

та цей розв'язок єдиний.

Таким чином, розв'язок однорідних лінійних систем призводить до задачі обчислення експонент від матриць.

Навпаки, якщо ми вже знаємо фундаментальну матрицю $\Phi(t)$ лінійної системи (1.74), то

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}. \quad (1.89)$$

Тобто ми можемо знайти експоненціальну функцію від матриці, знаючи розв'язок лінійної системи (1.74).

Розглянемо тепер методи розв'язання неоднорідних лінійних систем.

Нехай ми маємо неоднорідну лінійну систему першого порядку

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (1.90)$$

де \mathbf{A} – стала матриця розміром $n \times n$ та “неоднорідний член” $\mathbf{f}(t)$ – дана неперервна векторнозначна функція.

Тоді загальний розв'язок рівняння (1.90) має вигляд

$$\mathbf{x}_{z.p.n.}(t) = \mathbf{x}_{z.p.o.}(t) + \mathbf{x}_{ч.p.n.}(t), \quad (1.91)$$

де $\mathbf{x}_{ч.p.n.}(t)$ – частковий розв'язок неоднорідної системи, а $\mathbf{x}_{z.p.o.}(t)$ – розв'язок відповідної однорідної системи.

Припустимо, що неоднорідний член $\mathbf{f}(t)$ в рівнянні (1.90) представляє собою лінійну комбінацію (зі сталими коефіцієнтами-векторами) добутків многочленів, експоненціальних функцій, синусів та косинусів. Тоді метод невизначених для систем має той самий вигляд, що й для одного лінійного диференціального рівняння, відмінність полягає тільки в тому, що використовуються невизначені коефіцієнти-вектори, а не скаляри.

У випадку, якщо виникають подібні доданки у загальному розв'язку однорідного рівняння та неоднорідних членах, є одна відмінність між методом невизначених коефіцієнтів для одного рівняння та системи рівнянь. У випадку системи зазвичай перше пробний розв'язок, який вибирається потрібно помножити не тільки на найменшу цілу степінь t , таку, щоб усунути подібні, але також і на всі більш низькі (невід'ємні цілі) степені t ,

причому всі отримані таким чином доданки мають бути включені до пробного розв'язку.

Окрім методу невизначених коефіцієнтів для розв'язання неоднорідних рівнянь часто використовують метод варіації параметрів.

Задачі, які зводяться до розв'язання систем диференціальних рівнянь

Часто складний процес або систему можна розбити на більш прості підсистеми або частини, які можуть бути проаналізовані окремо. Іноді трапляється, що кожен окрему підсистему можна описати одним диференціальним рівнянням, тоді модель всієї фізичної системи може бути подана системою диференціальних рівнянь.

Простим прикладом є система з трьома каскадами наведена на рис. 4.1.

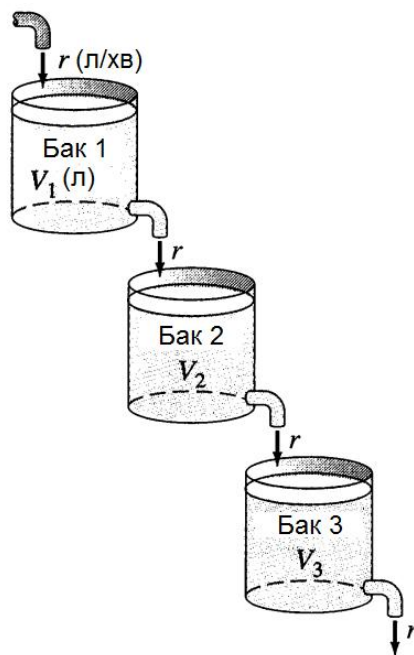


Рис. 3.1. Три бака з сумішами

Розглянемо три бака із сумішами (рис. 3.1). Нехай суміш це розчин солі у воді. Кожен бак містить V_1 , V_2 та V_3 літрів суміші відповідно. В бак 1

вливається прісна вода, перемішаний розчин виливається з бака 1 в бак 2, з бака 2 у бак 3 та витікає з бака 3. Позначимо $x_i(t)$ кількість (в кілограмах) солі у баку i в момент часу t для $i = 1; 2; 3$. Якщо в кожен бак вливається та виливається r літрів на хвилину, то маємо систему першого порядку

$$\begin{cases} x_1' = -h_1 x_1, \\ x_2' = h_1 x_1 - h_2 x_2, \\ x_3' = h_2 x_2 - h_3 x_3, \end{cases} \quad (1.92)$$

де $h_i = \frac{r}{V_i}$, $i = 1; 2; 3$.

Розглянемо “замкнену” систему (рис. 3.2), що складається з трьох баків з об’ємами V_1 , V_2 та V_3 . Відмінність цієї системи, від попередньої полягає в тому, що вода, яка витікає з бака 3, вливається в бак 1.

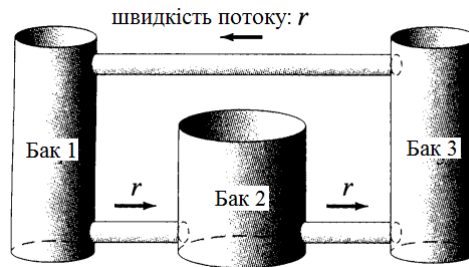


Рис. 3.2. “Замкнена система” з трьох баків із сумішами

Тоді СЛДР, що описує цю систему приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1' = -h_1 x_1 + h_3 x_3, \\ x_2' = h_1 x_1 - h_2 x_2, \\ x_3' = h_2 x_2 - h_3 x_3, \end{cases} \quad (1.93)$$

де $h_i = \frac{r}{V_i}$, $i = 1; 2; 3$.

Розглянемо систему, що складається з трьох тіл зв’язаних між собою та двома стінами пружинами (рис. 3.3). Припустимо, що ці тіла рухаються без тертя та що кожна пружина підпорядковується закону Гука – її

розтягнення або стиснення x та сила реакції F пов'язані формулою $F = -kx$. Якщо зміщення вправо x_1 , x_2 та x_3 цих трьох тіл відносно їх рівноважних положень додатні, то:

- перша пружина розтягнута на відстань x_1 ;
- друга пружина розтягнута на відстань $x_2 - x_1$;
- третя пружина розтягнута на відстань $x_3 - x_2$;
- четверта пружина розтягнута на відстань x_3 .

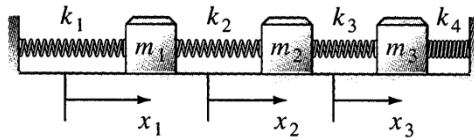


Рис. 3.3. Три тіла з'єднані пружинами

Застосовуючи закон Ньютона $F = ma$ до цих трьох тіл, отримуємо рівняння їх руху:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' = -k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2), \\ m_3 x_3'' = -k_3 (x_3 - x_2) - k_4 x_3. \end{cases} \quad (1.94)$$

Введемо позначення:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T - \text{вектор зміщень}, \quad (1.95)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} - \text{матриця мас}, \quad (1.96)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) \end{bmatrix} - \text{матриця жорсткості}. \quad (1.97)$$

Тоді систему (1.94) можна записати в матричній формі

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' = \mathbf{K}\mathbf{x}. \quad (1.98)$$

Введена система позначень легко узагальнюється на випадок n з'єднаних пружинами тіл, тоді:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

та

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) & k_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -(k_4 + k_5) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(k_{n-1} + k_n) & k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n & -(k_n + k_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

Діагональна матриця \mathbf{M} є несингулярною (не виродженою), щоб отримати її обернену матрицю \mathbf{M}^{-1} , потрібно замінити кожен діагональний елемент його оберненою величиною.

Отже, якщо помножити обидві частини рівняння (1.98) на \mathbf{M}^{-1} , отримаємо однорідну систему другого порядку

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.101)$$

де $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$.

Існує багато різноманітних механічних систем, в яких можна знехтувати тертям, для яких можуть бути визначені зміщення, або радіус-вектор \mathbf{x} , несингулярна матриця мас \mathbf{M} , а також матриця жорсткості \mathbf{K} , що задовольняють рівнянню (1.98).

Лінеаризація нелінійних систем, аналіз їх фазових портретів та стійкості

Найрізноманітніші природні явища можуть бути змодельовані двомірними автономними системами першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases} \quad (1.102)$$

Завдяки відсутності t в правих частинах, система (1.102) не тільки виглядає простіше, але й значно простіше аналізувати її розв'язки та візуалізувати їх.

Будемо припускати, що функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ неперервно диференційовні в деякій області R площини xu , яку називають *фазовою площиною* системи (1.102).

Тоді, можна довести, що для заданого t_0 та будь-якої точки (x_0, y_0) області R існує єдиний визначений на деякому відкритому інтервалі (a, b) , що містить t_0 , розв'язок $x = x(t)$, $y = y(t)$ системи (1.102) такий, що задовольняє початковим умовам

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.103)$$

В цьому випадку рівняння $x = x(t)$, $y = y(t)$ представляє собою параметричне задання інтегральної кривої у фазовій площині. Будь-яку таку інтегральну криву називають *траєкторією* системи (1.102). Рисунок, що зображує траєкторії системи на площині xu , називається *фазовим портретом*. Через кожну точку області R проходить рівно одна траєкторія, таким чином ніякі дві різні траєкторії автономної системи не можуть перетнутися.

Точкою рівноваги (особливою точкою, стаціонарною точкою, стаціонарним розв'язком, положенням рівноваги, нерухомою точкою, точкою спокою, критичною точкою) системи (1.102) називають точку (x^*, y^*) , таку що

$$F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0. \quad (1.104)$$

Якщо (x^*, y^*) – точка рівноваги системи, то функції-константи

$$x(t) \equiv x^*, \quad y(t) \equiv y^* \quad (1.105)$$

задовольняють рівнянням (1.102). Такий розв'язок-константа називається *рівноважним розв'язком (стаціонарним розв'язком)* системи. Зверніть увагу, що траєкторія рівноважного розв'язку (1.105) складається з єдиної (ізолюваної) точки (x^*, y^*) .

Якщо початкова точка (x_0, y_0) не є точкою рівноваги, то відповідна траєкторія представляє собою криву у площині xu , по якій рухається точка $(x(t), y(t))$ при збільшенні t .

Оскільки функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ не залежать від незалежної змінної t , то можливо побудувати *поле напрямків* на фазовій площині, в іншому випадку цього не можливо зробити. Поле напрямків можна побудувати рисуєчи типові відрізки прямих, що мають нахил

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}. \quad (1.106)$$

Ці відрізки мають напрям, що задається вектором $(F(x, y), G(x, y))$, оскільки, вектор швидкості точки $(x(t), y(t))$, що рухається дорівнює $(x'(t), y'(t))$, то можна сказати, що поле напрямків вказує напрям, в якому рухається точка по своїй траєкторії.

Розглянемо поведінку розв'язків автономної системи (1.102) в околі ізолюваної точки рівноваги $(x_0; y_0)$. Критичну точку називають *ізолюваною*, якщо в деякому її околі немає іншої точки рівноваги. Будемо вважати, що функції $F(x; y)$ та $G(x; y)$ неперервно диференційовні в околі точки $(x_0; y_0)$.

Можна без втрати загальності прийняти, що $x_0 = y_0 = 0$.

Нагадаємо, що формула англійського математика Брука Тейлора, відкрита у 1712 році, для розкладення функції двох змінних у степеневий ряд має такий вигляд

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} [f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)] + \\ & + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + \\ & + \dots + \frac{1}{n!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) + R_n(x, y), \end{aligned}$$

$$\text{де } R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(x_0 + \vartheta(x - x_0), y_0 + \vartheta(y - y_0)) -$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

залишковий член у формі Лагранжа.

Інколи залишковий член записують у вигляді $o(\rho^n)$,

$$\text{де } \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

З формули Тейлора слідує, що коли функція $f(x, y)$ неперервно диференційовна в околі точки $(x_0; y_0)$, то

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + u \cdot f'_x(x_0, y_0) + v \cdot f'_y(x_0, y_0) + o(\rho(u, v)),$$

$$(1.107)$$

де $\rho(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$. Якщо $(u; v) \rightarrow (0; 0)$, то $\rho(u, v) \rightarrow 0$.

Застосувавши формулу Тейлора для функцій $F_1(u, v)$ та $G_1(u, v)$ отримаємо

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \cdot F'_x(x_0; y_0) + v \cdot F'_y(x_0; y_0) + o(\rho(u; v)), \\ \frac{dv}{dt} = u \cdot G'_x(x_0; y_0) + v \cdot G'_y(x_0; y_0) + o(\rho(u; v)). \end{cases} \quad (1.108)$$

Отже, коли точка $(u; v)$ попадає в достатньо малий окіл початку координат $(0; 0)$, то, в загальному випадку нелінійна система (1.108), досить добре наближується лінеаризованою системою

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \cdot F'_x(x_0; y_0) + v \cdot F'_y(x_0; y_0), \\ \frac{dv}{dt} = u \cdot G'_x(x_0; y_0) + v \cdot G'_y(x_0; y_0), \end{cases} \quad (1.109)$$

причому її сталі коефіцієнти – значення часткових похідних функцій $F(x, y)$ та $G(x, y)$ в критичній точці $(x_0; y_0)$

Припустивши, що $(0; 0)$ є також ізольованою точкою рівноваги цієї лінійної системи, початкова система (1.102) називається *майже лінійною (квазілінійною)* в ізольованій критичній точці $(x_0; y_0)$. В цьому випадку її лінеаризація в $(x_0; y_0)$ – лінійна система (1.109). Ця лінеаризація представляє собою лінійну систем

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{w}, \quad (1.110)$$

де $\mathbf{w} = [u \quad v]^T$, а $\mathbf{J}(x_0; y_0)$ – матриця Якобі.

Матриця Якобі записується таким чином:

$$\mathbf{J}(x_0; y_0) = \begin{bmatrix} F'_x(x_0; y_0) & F'_y(x_0; y_0) \\ G'_x(x_0; y_0) & G'_y(x_0; y_0) \end{bmatrix}. \quad (1.111)$$

В більшості випадків фазовий портрет майже лінійної системи в околі ізольованої точки рівноваги $(x_0; y_0)$ дуже нагадує фазовий портрет його лінеаризації в околі початку координат.

Визначимо поняття стійкості та асимптотичної стійкості точки рівноваги.

Точка рівноваги $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ автономної системи (1.102) називається *стійкою*, якщо з того, що початкова точка $\mathbf{x}_0 = (x_0; y_0)$ розміщена достатньо близько до (x^*, y^*) слідує, що $(x(t); y(t))$ залишається близькою до $(x^*; y^*)$ для всіх $t > 0$.

Таким чином, точка рівноваги $\mathbf{x}^* \in$ *стійкою*, якщо виконана наступна умова:

для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що коли

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta, \quad \text{то} \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon \quad (1.112)$$

для всіх $t > 0$.

Інколи визначення стійкості положення рівноваги дають таким чином: точка рівноваги $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ автономної системи (1.102) називається *стійкою по Ляпунову*, якщо за будь-яким її оточенням V можливо вказати такий його оточення W , що будь-який рух, що починається в W не виходить за межі V (рис. 3.4).

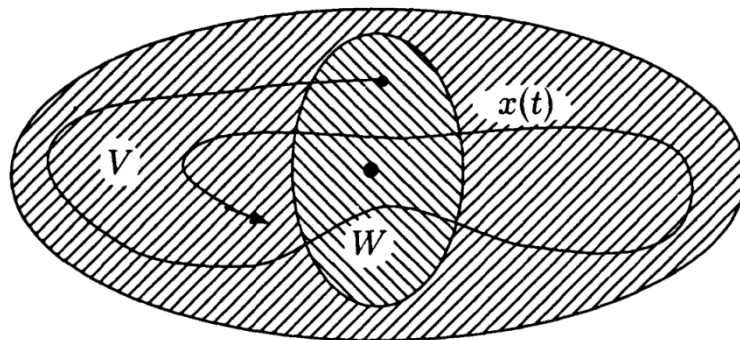


Рис. 3.4. Альтернативне визначення стійкості точки рівноваги

Питання про стійкість точки рівноваги рівнозначне питанню про те, як рухається матеріальна точка заданої маси, коли вона трохи відхилена від її положення рівноваги:

- повертається до точки рівноваги при $t \rightarrow \infty$ (асимптотично стійка);
- залишається в околі точки рівноваги, не наближуючись до неї (стійка, але не асимптотично);
- віддаляється від точки рівноваги (нестійка).

Виконаємо дослідження критичної точки $(0; 0)$ лінійної системи

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.113)$$

де $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = [x(t); y(t)]^T$.

Ми припускаємо, що $(0; 0)$ – ізольована точка рівноваги системи (1.113), з цього слідує, що $\det \mathbf{A}$ відмінний від нуля. Звідки слідує, що $\lambda = 0$ не є власним числом матриці \mathbf{A} та, що обидва відмінних власних значення матриці \mathbf{A} відмінні від нуля.

Для дослідження характеру ізольованої точки рівноваги $(0; 0)$ можна використати метод власних векторів та власних значень, що був розглянутий для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь, тоді характер ізольованої точки рівноваги $(0; 0)$ залежить від того, чи є обидва відмінних від нуля власних значення λ_1 та λ_2 матриці \mathbf{A} :

- дійсними та різними з однаковим знаком;
- дійсними та різними з різними знаками;
- однакові дійсні;
- комплексно спряженими з відмінною від нуля дійсною частиною;

- чисто уявними числами.

Завдання на лабораторну роботу

1. Побудувати поле напрямків та типові фазові траєкторії системи диференціальних рівнянь, заданої за варіантом (табл. 3.1).
2. Знайти розв'язки системи диференціальних рівнянь з початковими умовами, заданої за варіантом (табл. 3.1), в аналітичному вигляді за допомогою будь-якого математичного пакета, використовуючи спеціальні функції, що наявні в ньому.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь (сітку обрати самостійно) з початковими умовами, задану за варіантом (табл. 3.1), будь-яким чисельним методом (вибір методу обґрунтувати) змінюючи точність обчислень, що задана за замовчуванням для обраного метода.
4. Вивести рівняння руху механічної системи зображеної на рис. 3.5. Знайти загальний розв'язок отриманої системи при заданих масах матеріальних точок та жорсткостях пружини (табл. 3.2). Знайти власні частоти механічної системи та описати власні моди коливань. Побудувати графік двох (два тіла рухаються в однаковому напрямку та у протилежних напрямках) власних мод.

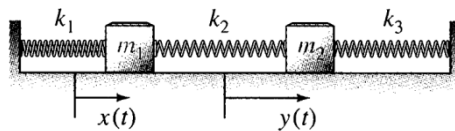


Рис. 3.5. Механічна система

5. Обчислити e^{At} і використовуючи отриману матрицю розв'язати, задану за варіантом, систему диференціальних рівнянь (табл. 3.3).

*Примітка: в кожному математичному пакеті наявна спеціальна функція для обчислення e^{At} . Наприклад, в MatLab такою функцією є `expm(A*t)`.*

6. Розв'язати задану за варіантом задачу Коші (табл. 3.4)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a.$$

методом варіації параметрів, попередньо обчисливши e^{At} . При необхідності дозволяється використати спеціалізований математичний пакет, але при цьому задача Коші має бути розв'язана заданим методом.

7. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь, що задана за варіантом (табл. 3.5). Побудувати фазовий портрет та поле напрямків даної системи. Визначити тип та стійкість кожної рівноважної точки.

Примітка: якщо за варіантом задано диференціальне рівняння вищого порядку, то його необхідно перетворити в еквівалентну систему диференціальних рівнянь першого порядку.

8. Аналітично знайти всі точки рівноваги системи диференціальних рівнянь, що задана за варіантом (табл. 3.6). Побудувати фазовий портрет для даної системи. За фазовим портретом перевірити коректність висновків отриманих аналітично.

9. Розв'язати задачу, задану за варіантом (табл. 3.7).

10. Для системи, заданої за варіантом (табл. 3.8), описати тип популяцій $x(t)$ та $y(t)$ та характер їх взаємодії. Знайти всі точки рівноваги даної системи і визначити їх тип та стійкість. Визначити при яких відмінних від нуля x та y можуть співіснувати ці популяції. Побудувати фазовий портрет та за фазовим портретом описати поведінку цих двох популяцій в залежності від початкових чисельностей $x(0)$ та $y(0)$.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підґрунття для виконання даної лабораторної роботи.
3. Поле напрямків та типові фазові траєкторії системи диференціальних рівнянь з п.1 завдання.
4. Розв'язок системи диференціальних рівнянь з п.2 завдання та код програми, яка її розв'язує.
5. Чисельні розв'язки системи диференціальних рівнянь з п.3 завдання:

Спеціалізований математичний пакет (вказати назву)	
Метод (вказати назву)	
x	y

6. Процес розв'язку задач з п.4–10 завдання.
7. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	5	7	2
2	11	8	9
3	8	9	4
4	1	10	7
5	3	11	6
6	10		

Таблиця 3.1. Варіанти завдань

Варіант №	Система рівнянь	Початкова умова
1	$\begin{cases} x' = y; \\ y' = -x. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(0) &= 1.00; \\ y(0) &= 11.00 \end{aligned}$
2	$\begin{cases} x' = -2y; \\ y' = 2x. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(1) &= 5.00; \\ y(1) &= 3.00 \end{aligned}$
3	$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}y; \\ y' = -8x. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(5) &= 7.00; \\ y(5) &= 11.00 \end{aligned}$
4	$\begin{cases} x' = y; \\ y' = 6x - y. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(7) &= 1.50; \\ y(7) &= 13.59 \end{aligned}$
5	$\begin{cases} x' = -y; \\ y' = 13x + 4y. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(1) &= 11.30; \\ y(1) &= 5.90 \end{aligned}$
6	$\begin{cases} x' = y; \\ y' = -9x + 6y. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(5) &= 7.00; \\ y(5) &= 9.00 \end{aligned}$
7	$\begin{cases} x' = y; \\ y' = x. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(8) &= 13.00; \\ y(8) &= 7.00 \end{aligned}$
8	$\begin{cases} x' = 10y; \\ y' = -10x. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(9) &= 7.00; \\ y(9) &= 13.00 \end{aligned}$
9	$\begin{cases} x' = 8y; \\ y' = -2x. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(2) &= 1.00; \\ y(2) &= 9.00 \end{aligned}$
10	$\begin{cases} x' = -y; \\ y' = 10x - 7y. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(0) &= 17.00; \\ y(0) &= 13.00 \end{aligned}$
11	$\begin{cases} x' = 5y + 1; \\ y' = -10x. \end{cases}$	$\begin{aligned} x(0) &= 7.00; \\ y(0) &= 8.00 \end{aligned}$

Таблиця 3.2. Варіанти завдань

Варіант №	m_1	m_2	k_1	k_2	k_3
1	4	2	8	4	0
2	1	1	1	4	1
3	1	1	1	2	1
4	1	2	2	4	4
5	2	1	100	50	0
6	1	2	1	2	2
7	1	1	2	1	2
8	1	1	4	6	4
9	5	1	7	1	50
10	9	5	3	2	30
11	7	4	1	5	7

Таблиця 3.3. Варіанти завдань

Варіант №	Система рівнянь	Початкова умова
1	$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 4x_2 ; \\ x'_2 = 2x_1 - x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(5) &= 17.00 ; \\ x_2(5) &= 19.00 \end{aligned}$
2	$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 ; \\ x'_2 = 2x_1 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(7) &= 7.00 ; \\ x_2(7) &= 5.00 \end{aligned}$
3	$\begin{cases} x'_1 = 9x_1 - 8x_2 ; \\ x'_2 = 6x_1 - 5x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(4) &= 9.00 ; \\ x_2(4) &= 11.00 \end{aligned}$
4	$\begin{cases} x'_1 = 6x_1 - 10x_2 ; \\ x'_2 = 2x_1 - 3x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(3) &= 14.00 ; \\ x_2(3) &= 15.00 \end{aligned}$
5	$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + x_2 ; \\ x'_2 = x_1 + 3x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(1) &= 11.00 ; \\ x_2(1) &= 13.00 \end{aligned}$
6	$\begin{cases} x'_1 = 9x_1 + 2x_2 ; \\ x'_2 = 2x_1 + 6x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(0) &= 3.00 ; \\ x_2(0) &= 4.00 \end{aligned}$
7	$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 4x_2 ; \\ x'_2 = 3x_1 - 2x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(7) &= 3.00 ; \\ x_2(7) &= 1.00 \end{aligned}$
8	$\begin{cases} x'_1 = 10x_1 - 6x_2 ; \\ x'_2 = 12x_1 - 7x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(4) &= 3.00 ; \\ x_2(4) &= 5.00 \end{aligned}$
9	$\begin{cases} x'_1 = 11x_1 - 15x_2 ; \\ x'_2 = 6x_1 - 8x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(1) &= 3.00 ; \\ x_2(1) &= 4.00 \end{aligned}$
10	$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + 2x_2 ; \\ x'_2 = 2x_1 + 4x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(13) &= 7.00 ; \\ x_2(13) &= 3.00 \end{aligned}$
11	$\begin{cases} x'_1 = 13x_1 + 4x_2 ; \\ x'_2 = 4x_1 + 7x_2 . \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1(17) &= 11.00 ; \\ x_2(17) &= 5.00 \end{aligned}$

Таблиця 3.4. Варіанти завдань

Варіант №	A	$f(t)$	$x(a) = x_a$
1	$\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 100t \\ -50t \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 180t \\ 90t \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18e^{2t} \\ 30e^{2t} \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 28e^{-t} \\ 20e^{3t} \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ t^{-2} \end{bmatrix}$	$x(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \cdot \cos t \\ 6 \cdot \sin t \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \cdot \ln t \\ t^{-1} \end{bmatrix}$	$x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sec t \\ 0 \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t \cdot \cos 2t \\ t \cdot \sin 2t \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4t \\ 1 \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 36t^2 \\ 6t \end{bmatrix}$	$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Таблиця 3.5. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння або система рівнянь
1	$x'' + 4x - x^3 = 0$
2	$x'' + 3x' + 4 \sin x = 0$
3	$x'' + 2x' + x + 4x^3 = 0$
4	$x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$
5	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x; \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x; \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases}$
7	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x; \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$
8	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x; \\ \frac{dy}{dt} = 3y. \end{cases}$
9	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 4y. \end{cases}$

Продовження табл. 3.5

Варіант №	Рівняння або система рівнянь
10	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y; \\ \frac{dy}{dt} = 4x. \end{cases}$
11	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

Таблиця 3.6. Варіанти завдань

Варіант №	Система рівнянь
1	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y + 2xy; \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 6y - xy. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + x^2 + y^2; \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y - 3xy. \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 5y + x^3; \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 6y + y^4. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y + 3xy; \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 3y - x^2 - y^2. \end{cases}$
5	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + x^4 - y^2; \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + y^4 - x^2. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y; \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y. \end{cases}$
7	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 - 1; \\ \frac{dy}{dt} = x^3 - y. \end{cases}$

Продовження табл. 3.6

Варіант №	Система рівнянь
8	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 5y + x^2; \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + y^2. \end{cases}$
9	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y - xy^2; \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + x^2y. \end{cases}$
10	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + y(x^2 + y^2); \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y(x^2 + y^2). \end{cases}$
11	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y - x^2 - y^2; \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 3xy. \end{cases}$

Таблиця 3.7. Варіанти завдань

Варіант №	Задача
1	<p>Побудувати фазовий портрет системи хижак-жертва:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 200x - 4xy; \\ \frac{dy}{dt} = -150y + 2xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$) і тип та стійкість точок рівноваги. Отримати лінеаризацію даної системи в двох точках: $(0; 0)$ та $(75; 50)$. Побудувати фазовий портрет для цих двох лінеаризацій. Порівняти фазові портрети при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>
2	<p>Побудувати фазовий портрет системи конкуренції:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy; \\ \frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$), а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(0; 0)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>

Варіант №	Задача
3	<p>Побудувати фазовий портрет системи конкуренції:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy; \\ \frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$), а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(0; 21)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>
4	<p>Побудувати фазовий портрет системи конкуренції:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy; \\ \frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$), а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(15; 0)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>

Варіант №	Задача
5	<p>Побудувати фазовий портрет системи конкуренції:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy; \\ \frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$), а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(6; 12)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>
6	<p>Побудувати фазовий портрет системи конкуренції:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 60x - 3x^2 - 4xy; \\ \frac{dy}{dt} = 42y - 3y^2 - 2xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$), а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(0; 14)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>

Варіант №	Задача
7	<p>Побудувати фазовий портрет системи конкуренції:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 60x - 3x^2 - 4xy; \\ \frac{dy}{dt} = 42y - 3y^2 - 2xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$), а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(20; 0)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>
8	<p>Побудувати фазовий портрет системи конкуренції:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 60x - 3x^2 - 4xy; \\ \frac{dy}{dt} = 42y - 3y^2 - 2xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$), а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(12; 6)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>
9	<p>Побудувати фазовий портрет системи хижак-жертва:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - x^2 - xy; \\ \frac{dy}{dt} = -2y + xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій ($x(t)$ та $y(t)$), а також який з ефектів (конкуренції</p>

Продовження табл. 3.7

Варіант №	Задача
	чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(0; 0)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.
10	<p>Побудувати фазовий портрет системи хижак-жертва:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - x^2 - xy; \\ \frac{dy}{dt} = -2y + xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій $(x(t))$ та $y(t)$, а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(5; 0)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>
11	<p>Побудувати фазовий портрет системи хижак-жертва:</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - x^2 - xy; \\ \frac{dy}{dt} = -2y + xy. \end{cases}$ <p>Визначити аналітично тип та стійкість точок рівноваги, тип популяцій $(x(t))$ та $y(t)$, а також який з ефектів (конкуренції чи затримки популяцій) є домінуючим в цій системі. Отримати лінеаризацію даної системи в точці $(2; 3)$. Побудувати фазовий портрет для цієї лінеаризації. Порівняти фазовий портрет при лінеаризації з фазовим портретом початкової системи.</p>

Таблиця 3.8. Варіанти завдань

Варіант №	Система рівнянь
1	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - xy; \\ \frac{dy}{dt} = 3y - xy. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy - 16x; \\ \frac{dy}{dt} = 4y - xy. \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - x^2 + \frac{1}{2}xy; \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}xy - y. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 30x - 3x^2 + xy; \\ \frac{dy}{dt} = 60y - 3y^2 + 4xy. \end{cases}$
5	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 30x - 2x^2 - xy; \\ \frac{dy}{dt} = 80y - 4y^2 + 2xy. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 30x - 2x^2 - xy; \\ \frac{dy}{dt} = 20y - 4y^2 + 2xy. \end{cases}$
7	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy - 4x; \\ \frac{dy}{dt} = xy - 3y. \end{cases}$

Продовження табл. 3.8

Варіант №	Система рівнянь
8	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - x^2 - \frac{1}{2}xy; \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 2xy. \end{cases}$
9	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - x^2 - \frac{1}{4}xy; \\ \frac{dy}{dt} = xy - 2y. \end{cases}$
10	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5xy + 4x; \\ \frac{dy}{dt} = 7xy - 3y. \end{cases}$
11	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2x^2 - \frac{1}{5}xy; \\ \frac{dy}{dt} = 3xy - 2y. \end{cases}$

Питання для самоперевірки

1. Яким чином можна перетворити диференціальне рівняння вищого порядку в систему диференціальних рівнянь першого порядку?
2. Правила диференціювання матричних функцій.
3. Записати систему лінійних диференціальних рівнянь у вигляді матрично-векторного рівняння.
4. Метод власних значень розв'язання однорідної системи диференціальних рівнянь
5. Що таке фундаментальна матриця лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь
6. Яка матриця називається нільпотентною?
7. Метод варіації параметрів розв'язання системи неоднорідних диференціальних рівнянь.
8. Навести приклад задачі, що зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь.
9. Яка система диференціальних рівнянь називається автономною?
10. Що таке траєкторія системи диференціальних рівнянь?
11. Що таке фазовий портрет системи диференціальних рівнянь?
12. Для якої системи диференціальних рівнянь можна побудувати поле напрямків?
13. Що таке рівноважний розв'язок системи диференціальних рівнянь?
14. Яким чином виконується лінеаризація нелінійної системи диференціальних рівнянь?
15. Як класифікують точки рівноваги системи диференціальних рівнянь?
16. Модель хижак-жертва.
17. Модель конкуренції.

Використана та рекомендована література

1. *Маликов Р.Ф.* Основы математического моделирования. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2010. – 368 с.: ил.
2. *Мещеряков В.В.* Задачи по математике с MatLab & Simulink – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2007 – 528 с.
3. *C. Henry Edwards, David E. Penney* Elementary differential equations, Sixth Edition: Prentice Hall.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4. МОДЕЛЮВАННЯ В *MATLAB & SIMULINK*

Мета роботи: опанувати засоби побудови найпростіших математичних моделей у *MatLab & Simulink*.

Теоретичні відомості

Щоб здійснити поєднання програми Matlab з S-моделлю, необхідно мати у наявності засоби, які дозволяють забезпечити:

- передавання даних з середовища Matlab у S-модель і зворотно;
- запуск процесу моделювання S-моделі з середовища Matlab, а також можливість змінювання параметрів моделювання і S-блоків з цього середовища;
- виклик програм Matlab з S-моделі;
- створення S-блоків не тільки із інших готових блоків, а і шляхом використання програм, записаних на М-мові.

Кожний блок S-моделі має такі внутрішні характеристики:

- вектор вхідних величин u ;
- вектор вихідних величин y ;
- вектор змінних стану x .

Вектор змінних стану може складатися зі змінних x_c неперервних станів, змінних x_d дискретних станів, або їх комбінації.

Математичні зв'язки між цими величинами можуть бути подані у виді наступних рівнянь:

- формування виходу:

$$y = f_o(t, x, u); \quad (1.114)$$

- оновлення (формування нового значення) змінних дискретних станів:

$$x_d(k+1) = f_u(t, x, u), \quad (1.115)$$

- формування значень похідної від вектору змінних стану:

$$\frac{dx}{dt} = f_d(t, x, u) \quad (1.116)$$

$$x = \begin{cases} x_c; \\ x_d(k). \end{cases} \quad (1.117)$$

Моделювання складається з двох фаз – ініціалізації і власне моделювання. У фазі ініціалізації виконуються наступні дії:

- 1) параметри блоків передаються у Matlab задля оцінювання (обчислення); результати числових операцій використовуються як фактичні параметри блоків;
- 2) ієрархія моделі згладжується: кожна не умовно виконувана підсистема замінюється блоками, з яких вона складається;
- 3) блоки сортуються у тому порядку, в якому їх потрібно змінювати; алгоритм сортування забезпечує такий порядок, що будь-який блок з прямим підключенням не змінюється, поки змінюються блоки, які визначають вхідні величини; на цьому кроку виявляються алгебричні цикли;
- 4) перевіряються зв'язки між блоками (перш за все збіжність довжини вектора вихідних величин кожного блоку з очікуваною довжиною векторів вхідних величин керованих ними блоків).

Власне моделювання здійснюється шляхом чисельного інтегрування. Кожний з наявних методів інтегрування (ODE) залежить від здатності моделі визначати похідні її неперервних станів. Розрахунок цих похідних здійснюється у два етапи. Спочатку кожна вихідна величина блоку обчислюється у порядку, визначеному у процесі сортування. На другому етапі обчислюються похідні кожного блоку для поточного моменту часу, вхідні змінні і змінні стану. Отриманий вектор похідних використовується для обчислення нового вектора змінних стану у наступний момент часу. Як

тільки завершується обчислення нового вектору змінних стану, блоки даних і блоки – оглядові вікна оновлюються.

З переліком програм розв’язувачів (інтеграторів), що прикладаються до пакету Simulink, можна ознайомитися у вікні Configuration Parameters, яке виникає на екрані після виклику команди Simulation > Configuration Parameters з меню блок-схеми.

У верхній частині вкладення *Solver* вікна *Configuration Parameters* містяться поля введення *Start time* (Початковий час) і *Stop time* (Кінцевий час), в яких встановлюється відповідно початкове і кінцеве значення аргументу (часу). В області Solver options (Параметри розв’язувача) у списку *Type* (Тип) обирається тип розв’язувачів, а у спадному списку *Solver* (Розв’язувач) праворуч від нього - конкретний розв’язувач.

Якщо обраний тип розв’язувачів *Fixed-step* (з фіксованим кроком), у списку праворуч з’явиться такий набір розв’язувачів:

- *discrete (no continuous states)* – дискретний (не неперервні стани);
- *ode5 (Dormand-Prince)* – метод Дормана-Принса (пятого порядку);
- *ode4 (Runge-Kutta)* – метод Рунге-Кутта (четвертого порядку);
- *ode3 (Bogacki-Shampine)* – метод Богацького-Шампена (третього порядку);
- *ode2 (Heun)* – метод Хойна (другого порядку);
- *ode1(Euler)* – метод Ейлера (першого порядку);
- *ode14x (extrapolation)* – екстраполяція .

При цьому у нижній частині вікна виникає поле *Fixed step size* (Розмір фіксованого кроку), у яке потрібно ввести значення кроку інтегрування. У списку *Tasking mode for periodic sample times*, що виникає нижче, слід обрати

один з трьох можливих режимів роботи: *Auto* (автоматический), *SingleTasking* (однозадачний) або *MultiTasking* (багатозадачний).

При обранні у списку *Type* (Тип) елемента *Variable-step* (зі змінним кроком), у спадному списку праворуч виникне інший список інтеграторів (методів чисельного інтегрування):

- *discrete (no continuous states)* – дискретний (не неперервні стани);
- *ode45 (Dormand-Prince)* – метод Дормана-Принса;
- *ode23 (Bogacki-Shampine)* – метод Богацького-Шампена;
- *ode113 (Adams)* – метод Адамса;
- *ode15s (stiff\NDF)* – метод NDF для жорстких систем;
- *ode23s (stiff\Mod.Rosenbrock)* – модифікація Розенброка для жорстких систем;
- *ode23t (Mod.stiff\Trapezoidal)* – метод трапецій, модифікація для жорстких систем;
- *ode23tb(stiff\TR-BDF2)* – метод TR-BDF2 для жорстких систем.

У цьому випадку у нижній частині поля *Solver options* виникають наступні поля введення:

- *Max step size* (Максимальний розмір кроку);
- *Min step size* (Мінімальний розмір кроку);
- *Initial step size* (Початковий розмір кроку),

а праворуч від них – поля

- *Relative tolerance* (Відносна точність);
- *Absolute tolerance* (Абсолютна точність).

В усіх полях, окрім *Relative tolerance*, встановлено значення *auto*, тобто ці параметри задаються автоматично і змінюються користувачем лише у випадку, коли йому потрібно встановити їх конкретні значення,

відмінні від прийнятих за замовчуванням. Відносна точність (точніше, відносна похибка) за замовчуванням дорівнює 10^{-3} .

Завдання на лабораторну роботу

1. Побудувати *Simulink*-модель системи нелінійних рівнянь, що задана за варіантом (табл. 4.1) та розв'язати її. В побудованій *Simulink*-моделі обов'язково мають бути присутні два блоки *Display* в яких буде виводитись значення коренів системи нелінійних рівнянь та два блоки *ToWorkspace*, за допомогою яких отримані значення коренів будуть передаватися в середовище *MatLab*. Для розв'язання кожного рівняння нелінійної системи рекомендується використовувати блок *Algebraic Constraint*.
2. Побудувати *Simulink*-модель диференціального рівняння, що задане за варіантом (табл. 4.2) та розв'язати його. В побудованій *Simulink*-моделі має бути використаний блок *Scope* (осцилограф) та *ToWorkspace*.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підґрунття для виконання даної лабораторної роботи.
3. Процес локалізації коренів системи нелінійних рівнянь п.1 завдання.
4. *Simulink*-модель системи нелінійних рівнянь та корені знайдені при імітаційному моделюванні.
5. *Simulink*-модель диференціального рівняння, його розв'язок знайдений при імітаційному моделюванні та вікно осцилоскопа з графіком знайденої інтегральної кривої.
6. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	6	7	8
2	9	8	3
3	1	9	10
4	2	10	11
5	7	11	4
6	5		

Таблиця 4.1. Варіанти завдань

Варіант №	Система рівнянь
1	$\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0; \\ x + 2y = 4. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2xy - y^2 + 5x + 20 = 0; \\ x + 2y = 4. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 200; \\ x + 2y = 100. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x - y = 1; \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$
5	$\begin{cases} y^2 - xy = -12; \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9; \\ xy = 2. \end{cases}$
7	$\begin{cases} (x - y)xy = 30; \\ (x + y)xy = 120. \end{cases}$
8	$\begin{cases} x^{-2} + y^{-2} = 13; \\ x^{-1} + y^{-1} = 5. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35; \\ x + y = 5. \end{cases}$
10	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65; \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$
11	$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0; \\ x + y + 8 = 0. \end{cases}$

Таблиця 4.2. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова
1	$y' = (1 - y) \cdot \cos x$	$x_0 = \pi$; $y(x_0) = 5$
2	$y' = \sqrt[3]{y}$	$x_0 = 0$; $y(x_0) = 1$
3	$y' = 2xy + x$	$x_0 = 3$; $y(x_0) = 3$
4	$y' = y \sin x$	$x_0 = 15$; $y(x_0) = 7$
5	$y' = xy \cdot \cos \frac{x}{3} + 0.25y$	$x_0 = 5$; $y(x_0) = 7$
6	$y' = e^x + y$	$x_0 = 3$; $y(x_0) = 1$
7	$y' = 6e^{2x-y}$	$x_0 = 1$; $y(x_0) = 7$
8	$y' = 2x^2 y^2$	$x_0 = 1$; $y(x_0) = -1$
9	$y' = 1 + x + y + xy$	$x_0 = 1$; $y(x_0) = 7$
10	$y' = \sqrt[3]{64xy}$	$x_0 = 5$; $y(x_0) = 23$
11	$y' = y \cdot e^x$	$x_0 = 0$; $y(x_0) = 2e$

Питання для самоперевірки

1. Принцип роботи блоку *Algebraic Constraint* у *Simulink*-моделі.
2. Принцип роботи блоку *Integrator* у *Simulink*-моделі.
3. Як змінити кількість входів в стандартних блоках *Simulink*-моделі?
4. Як отримати графік інтегральної кривої диференціального рівняння за допомогою осцилографа?
5. Принцип роботи суматора, помножувача та блоку *MathFuction* у *Simulink*-моделі.
6. Яким чином можна передати дані з *Simulink*-моделі у робоче середовище *MatLab*?

Використана та рекомендована література

1. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MatLab. Учебный курс. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2005. – 512 с.: ил.
2. Мецзяков В.В. Задачи по математике с MatLab & Simulink – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2007 – 528 с.
3. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.